和歌山大学教育学部
教育実践総合センター紀要
No.15　2005

中学校・高校数学の構造（1）

The Structure of Mathematics of Junior or Senior High Schools (1)

佐藤　英雄　　　森杉　馨

SATO Hideo　　　MORISUGI Kaoru

和歌山大学教育学部附属教育実践総合センター

中学校・高校数学の構造（１）

The Structure of Mathematics of Junior or Senior High Schools (1)

佐藤　英雄　　　森杉　馨
Hideo SATO　　　Kaoru MORISUGI
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

大学で学ぶ数学は、現場ではほとんど使われないとか、あんな難しいことは必要ないとか、中学校や高等学校での実践的な内容と大学での数学内容の乖離が指摘されている。しかし、数学的にみれば、中学校高校の数の拡張や指数関数などの話は実数論が不可欠であるし、整数などの理解にも群論的あるいは代数的な見方が必要である。

一方で、中高の数学、とりわけ中学校の数学では、その数学内容を教える際に生徒に受け入れられ易いよう様々な教育的工夫がされている。つまり、生徒が飲み込みやすいようオブラートにくるんだり、関心意欲興味を引き起こすように彩色されたり、余分な疑問を抱かせないよう植樹して中がもろには見えないようにするなどしている。このような教育的工夫は教育上は当然必要なものであるが、迷彩が施されたり、オブラートや植樹で包み込まれているため、その数学的構造が見えにくくなっていることも事実である。

この小論では、中学校高校の教材のどの部分が教育的配慮の工夫であるかを明らかにし、それを取り除いて見える教材の中の数学的構造を明らかにすること、および、その数学的構造が持っている問題点を指摘して、純粋の数学的立場からの説明はどうなのかを述べる。また、これらを理解する上で、大学で学ぶ数学がいかに役立つかも述べたい。 表題の中学校・高校数学の構造というのは、上に述べた、教育的配慮による構造、およびその理論的な数学的構造の２つをさしている。 今回は第１部として、数の拡張を中心に扱う。

キーワード: 数の拡張、 演算、 定義、 教育的工夫、 数学的構造

1. 正の数・負の数

まず、小学校の数の計算を既習事項として、中学高校でどのような新しい数がどのように導入されてどのように説明されているかを述べる。

言うまでもなく小学校では自然数の足し算、引き算 (可能な場合)、掛け算、割り算 (これは商とあまりを求めること)、および分数や小数の和差積商の四則を学んでいる。しかしその指導は必ずしても論理的ではなく定義自体もあいまいである。というより定義という概念がないと言った方がわかりやすい。

中学校では小学校から高校への中間地点として徐々に定義らしきものが出てくる。しかし中学段階では何が定義で何が性質かと言うのは、生徒の理解しやすさや受け入れられ易さという教育的配慮からか、あまり見えないようになっている。故にその性質として述べられているものも確かめようがない。逆にいえば性質を確かめるためには、定義自体を明確にする必要があり、大学での数学が定義主体とならざるをえない事情もこのあたりにある。

1.1. 学習内容

1.1.1. 負の数の導入と正の数・負の数の大小

負の数は、 中学１年の最初の単元で、温度計などを利用して導入されている。小学校までの数直線 (＝半直線) を延長して直線上に目盛りをうった数直線を考え、負の数も含めてすべての数は数直線上の点と対応していることを学ぶ。

a) $(-a)$ は 0 より a 小さい数であり、数直線上では、点 a と原点に対して折り返した位置にある。
b) 言い換え、-5 大きい＝ 5 小さい。
c) 大小、a の絶対値が説明される。数直線上では左

にある数が小さく、数 a の絶対値は点 0 から点 a までの数直線上の長さに等しい。

1.1.2　２数の和および積

次に, そのような数を含めて和差積商などの演算を取り扱うため、まずは操作としての足し算・引き算を負の数まで拡張する。

a) $a+5$ は a より 5 大きい数
b) $a-5$ は a より 5 小さい数
c) $a+(-5)$ は a より (-5) 大きい数
　　$=a$ より 5 小さい数$=a-5$
d) $a-(-5)$ は a より (-5) 小さい数
　　$=a$ より 5 大きい数$=a+5$

別な方法としては、あるものに操作を施すという考えではなく、数をベクトル的に考えて、数直線を利用して和をベクトル的に説明する方法もある。

いずれの方法をとっても最終的には、２項演算としての和を

e) 上のように、減法は加法に書き直せることを使って、２数の和 (２項演算としての和) は２数の符号と絶対値に注目して計算すればよい

とまとめ、

・) ３つ以上の数の加法減法は正の項負の項をまとめて計算すれば簡単になることを学ぶ

としている。

積に関しては

f) 正の数をかける。
$2\times 3=2+2+2$
と同じように考えて、
$(-2)\times 3=(-2)+(-2)+(-2)=-6$

g) 負の数をかける。
$2\times 1=2,$
$2\times 0=0,$　　ゆえに、
$2\times(-1)=-2,$　　さらに、
$2\times(-2)=-4,$
$2\times(-3)=-6,$
同様に、
$(-2)\times(-3)=6$

積の導入として、別の方法もある。例えば、一定の速さで、東に向かって歩くを＋、西をーとして、更に、〇分後を＋、〇分前をーとして、西方向に歩くとき 3 分前の位置を調べるなどして。２数の積の符号がどうなるかを考えさせることから導くこともある。

ついで、

h) 商についても同様
i) ２数の積商のまとめ
j) 逆数、３つ以上の数の積商
最後に
k) 四則を含む計算
四則を含む式の計算の効率的計算法を学ぶと同時に計算法則 (和や積の結合法則交換法則や分配法則など) が成立することを知らせる

以上が中学校１年で導入される負の数を含む数の四則の概略である。なおこの段階ではまだ文字式は学んでおらず、文字も利用されていない、そのため、計算法則などの一般的に成り立つ式は〇□△などを用いて説明されている。

1.2. 数学的構造

1.2.1. 整数の定義

以下数学的な立場から上記内容を振り返る。

1.1.1. 節の段階で考えたいものが整数なのか整数以外の分数も含むのかは明確にはされていない。説明の段階では整数の集合およびその元の大小関係が定義されたように見えるが例などをみると有理数まで定義されたようにも見える。ここでは話しを厳密にするため整数を定義しているものと限定して考える。

1.1.1. 節で述べた内容から定義を読み取ると次のように考えられる。

自然数 $\mathbb{N}$ をもとにして、”負の数” $\mathbb{N}'=\{a'|a\in\mathbb{N}\}$ (今は $(-a)$ という記号を避けて a' で表す)。このとき整数の集合 $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\mathbb{N}'$ が集合として定められ、同時に $\mathbb{Z}$ の元の大小関係が定義されたことになる。上記 1.1.1. 節の a)b)c) はそのような定義をするための説明であり、定義ではない。

ついでに上の定義を整数のみでなく”数”全体で考えたとき、数直線はその幾何学的モデルであり、負の数を含めた”数”全体を理解する上で教育上有益なものである。がしかし数直線を基にしても”数”全体は数直線そのものが定義されていないため定義されない。

1.2.2 整数の演算

1.1.1. 節で定義した $\mathbb{Z}$ に和および積を定義する。この定義を導き出すために 1.1.2. 節 では operator の考えを用い、それがこれまでの自然数と場合と同じ性質も持つ (だろう) という前提で、和とか積がどのようなるかを考えている。

和に関しては 1.1.2. 節 の e) は、正確には次のように述べられる。同符号の場合にはその絶対値 (これは 0 または自然数) の和を考えてそれにその符号をつける、異符号の場合には絶対値の差 (大きい方から小さい方を引く) を考えてそれに大きい絶対値を持つ数の符号をつける。これが定義であり同時に計算の仕方である。

これで $\mathbb{Z}$ の演算、和、が定義されたことになっている。しかし気持ちが悪いのは、和の定義の中で２数が

異符号の場合、絶対値の差を考えなけらばならないことである。

積に関しても 1.1.2. 節 の f)g) にみられるように自然数の場合と同じように分配法則が成り立つという前提で積がどうなるかを述べている。例えば、1.1.2. 節の g) の $2\times(-3)=-6$ は (-3) を $(-1)+(-2)$ と思って、分配法則を適用し，それまでに導いている、$2\times(-1)=-2$、$2\times(-2)=-4$ を使って導かれる。

これらの様子から、積に関しては, 同符号の２数の場合にはその絶対値の積にプラスの符号を、異符号の場合にはその積の絶対値にマイナスの符号をつけると定義している。

つまり、これまでの数の体系と同じような性質を持つことを前提にすれば和や積は上のようになる (と定義されるべきである) と言っていて、そのようなものが実際にあるかどうかは一切触れていない。だから計算法則 (和・積の結合法則交換法則分配法則など) は例示以外に確かめられていない。

実際、上の定義に従って計算法則を確かめるのは容易ではない。たとえば和の結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$ を確かめるためには相当に煩雑な場合分けが必要になる。

1.3. 解説

では数学的にはどのように整数が構成されているか、大学ではどのように構成されているかを簡単に述べる。

普通、大学では、整数 $\mathbb{Z}$ は自然数の対全体のなす集合 $\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathbb{N}\}$ に同値関係

$$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow a+d=b+c \text{ in } \mathbb{N}$$

を入れた商集合 (＝同値類の集合) と定義する。

これは、帳簿をつけるときに収入と支出の２つを使って表し、収入が 1000 円、支出が 800 円という状態と収入が 500 円、支出が 300 円という状態を同じだと思うのと一緒である。

この商集合に２つの演算

$$\text{和}\qquad [(a,b)]+[(c,d)]=[(a+c,b+d)],$$
$$\text{積}\qquad [(a,b)]\times[(c,d)]=[(ac+bd,ad+bc)]$$

を導入しこれらの演算が well-defined であることを確認する。同様に、大小関係は

$$[(a,b)]<[(c,d)]\Leftrightarrow a+d<c+b\in\mathbb{N}$$

で決まる。

一方で、写像 $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ を $\phi(a)=[(a+1,1)]$ で定義すると、この $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ は単射で和、積を保つことがわかるので、$\phi(a)=[(a+1,1)]$ を自然数 a と同一視して、今考えた $\mathbb{Z}$ の中に自然数 $\mathbb{N}$ が入っている、つまり、この $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ を拡張したものとみる。

このようにして定義した整数 $\mathbb{Z}$ は、和や積に関する結合法則、交換法則、0 や 1 の役割を持つ元の存在、和や積に関する逆元の存在、分配法則などをみたすことがすぐに示される。これらのことを使うと一般的に $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$ などもわかる。

中学校で、なぜ $(-1)\times(-1)$ は 1 になるかは、種々の工夫に基づく説明がされているが、理論的には、分配法則が成り立つならば、必ずそうなるのである。

整数の、集合としての定義、および、その演算の定義を上記の中学校でのものと比較すると, 中学校の方が圧倒的に受け入れられやすいであろう (事実、大学での整数の構成は大学生でも理解できていないものが多々いる) が、それらがもっている性質を check するには大学での構成方法が望ましい。

その他にも、中学校では整数を考える最初の導入から $-a$ を整数の元としているが、大学ではゼロ元 0、単位元 1 は、その元が演算の中で特別な機能を持つものとして導入される。つまり定義に従うと

$$\alpha+[(1,1)]=\alpha \qquad (\forall\alpha\in\mathbb{Z}),$$

となるので元 $[(1,1)]$ がゼロ元でありこれを 0 と表す。同様に $\alpha\in\mathbb{Z}$ に対して $(-\alpha)$ とは $x+\alpha=0$ を満たす $x\in\mathbb{Z}$ のことである。

ついでながら、小学校における分数の指導と大学で学ぶ整数環 $\mathbb{Z}$ からの有理数体 $\mathbb{Q}$ の構成の関係を見てみよう。

小学校では、たとえば、あるものを、２つに分けた時の１つと、４つに分けた２つは同じだから $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}$ と説明している。

この説明は、数学的には、$(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ として集合 $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}-\{0\})$ に同値関係を導入するということと同じである。その意味では、分数 $\dfrac{a}{b}$ とは元 (a,b) の同値類をあらわしている。このとき、共通分母をとって分子の和をとるという分数同士の和や、分子同士、分母同士を掛けるという分数の積が well-defined であり、これらの和と積により、分数全体、つまり有理数 $\mathbb{Q}$ が体をなすことは数学的には容易に示される。

2. 中３高１の無理数

2.1. 学習内容

$\sqrt{2}$ などを考える必要性、そのような長さがあること、などは中学３年で出てくる。直角三角形のピタゴラスの定理はまだ学んでいないため、導入は多少の工夫を要する。具体的には、一辺の長さが 2 の正方形を考えて、この正方形の各辺の中点を頂点とする正方形

の面積は2となること、だから、内部のこの正方形の一辺の長さを x とすると $x^2=2$ となる。そこで、$x>0$ で $x^2=2$ をみたす数を $\sqrt{2}$ と表すと導入されている。同様に、$a>0$ に対して、$\sqrt{a}$ が定義され、その性質として

$$a,b>0 \text{ のとき、} \quad a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$$

を学ぶ。この説明も、$a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ などの因数分解によるものではなく、正方形の面積と一辺の長さの関係から説明している。(上記の逆も当然正しいが、逆はまとめとしてはでていないようである。)

平成９年度版の教科書までは、中学校で、この $\sqrt{2}$ が有理数ではないことが説明されていたが、平成１４年度版では、その記述は残るが説明自体はすべて高校の数学 I または数学 A の論理に移った。

$\sqrt{2}$ が有理数ではないことは、平成９年度までは、次のように説明されていた。1) $1<\sqrt{2}<2$ より、これは整数ではない。2) $\sqrt{2}$ が (整数ではない真の) 分数とすると、約分できない分数は２乗しても約分できない (これは素因数分解の一意性からわかる) ので、２乗して２となるものは分数ではない。

高校の数学Aの論理の背理法による証明では、すべての有理数は既約分数で表されることを利用し、$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定すると、規約分数であるはずのものが分子分母が２の倍数になっていて矛盾すると言う論法である。こちらは、素因数分解の一意性は使っていない。

中学校の教科書には、$\sqrt{2}$ の近似計算などをした後、$\sqrt{2}$ は有限小数ではなく、循環しない無限小数で表されると書いてある。この説明は高校教科書の本文にはされていないが、有限小数は有理数であることは当然としても、本文ではなくカラムなどでは、循環する無限小数も有理数であることが示され、逆に有理数は、有限小数か循環無限小数で表されることも説明されていることもある。

そして、$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ のように有理数でない数を無理数という。無理数は循環しない無限小数で表される。

結局、数 (=実数) は、有理数と無理数からなり、小数で表した時、有理数は有限小数または循環小数で表されるものであり、無理数は循環しない無限小数で表されるものからなると説明される。

2.2. 数学的構造

上記の説明は、とてもうまい、説得力のある説明であるが、それでも、実数の定義になっているとはいいがたい。つまり、有理数の定義ははっきりしているが、無理数とは、数のうち有理数でないものとされているため、”数”(実数) が決まっていないと無理数も決まらない。高校教科書の説明部分を拡大解釈をすると、実数とは、無限も含めて、小数全体であり、そのうちの循環する無限小数および有限小数を有理数といい、循環しない無限小数を無理数と呼ぶと定義している。ただし、これを定義と思うにはいくつか気持ちの悪いところがある。まず第１に、1.0 と $0.9999\cdots$ などは小数表示は異なるが同じ数を表していてほしい。実際、循環する無限小数は有理数であり、$0.9999\cdots$ は $\dfrac{9}{9}=1$ となる。つまり、この小数表記では表し方が一意ではない。第２には、循環しない無限小数を”数”の仲間に入れるためには、本来、大小関係や和積などの演算が定義されている必要があるがこれは説明されていない。つまり、小数表記を実数の定義として採用するのはかなりの無理があることがわかる。ただし、後で述べるように、これは筋違いというわけではないのである。

2.2.1. $\sqrt{2}$ が無理数であること

$\sqrt{2}$ が無理数であることについては、その説明がどのようにされているかは、2.1. 節で述べたが、素因数分解を使う証明の方が、生徒にとってわかりやすく、また、応用も広い。例えば、まったく同じ証明で、m,n を自然数として、$\sqrt[n]{m}$ が整数なければ、これは無理数であることや、同じように $\log_{10} m$ が整数でなければこれも無理数になることが示される。

更に、小学校や中学校の約数や倍数などの指導内容は明らかに素因数分解の一意性を前提としており、これをあえて使わない証明を見せる必要があるかどうかも疑問である。

$\sqrt{2}$ が無理数であることが 数学 A の論理の中で紹介される場合、その目的は $\sqrt{2}$ が無理数であることではなく、背理法の説明であるので、ここで説明されても無理数の話しとしての生徒の印象は低いだろう。

2.3. 解説

$\sqrt{2}$ や円周率などは有理数ではないので、これらを含む $\mathbb{Q}$ の拡張である実数 $\mathbb{R}$ を考える必要性がある。ところが、$\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ への拡張は、これまでの拡張 (四則演算が自由にできるようになど) とは、まったく異なり、連続性、言い直すと極限概念が必要になる。

実数の構成は別にして、実数とは、要するに、$\mathbb{Q}$ の完備化である。つまり、有理数列の極限は必ずしも有理数の範囲には収まらない。そこで、$\mathbb{R}$ の Cauchy 列は必ずその極限が $\mathbb{R}$ に収まるように、$\mathbb{Q}$ に数を追加したものである。

言い直すと、実数とは、有理数の Cauchy 数列で、これに、同値関係

$$\{a_n\}\sim\{b_n\} \Leftrightarrow \lim(a_n-b_n)=0$$

を考えた同値類の集合である。これはラフにいえば、同じ極限値をもつ数列は同じものを表していると考え

ることである。そして、演算の導入にはこれらの同値類の集合に次の和および積を定義する。

$$\text{和}\ [\{a_n\}]+[\{b_n\}]=[\{a_n+b_n\}]$$
$$\text{積}\ [\{a_n\}]\cdot[\{b_n\}]=[\{a_n\cdot b_n\}]$$

中学３年や高校１年での無理数とは、循環しない無限小数

$$x_0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$$

であった。これは、数列 $\{a_n\}$ で $a_0=x_0$, $a_1=a_0+\dfrac{x_1}{10}\cdots$, $a_n=a_{n-1}+\dfrac{x_n}{10^n}\cdots$ のことである。これは明らかに (上に有界な単調増加な)Cauchy 列をなす。更に、$a_n\in\mathbb{Q}$ であり、その極限を無限小数 $x_0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ で表していると考えられる。

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$ では、
$a_0=1$, $a_1=1.4$, $a_2=1.41$, $a_3=1.414,\cdots$
で、その極限値である

$$1.41421356\cdots=\sqrt{2}$$

は循環しない無限小数となり、有理数ではない。

有理数の数列で $\sqrt{2}$ に収束するものは多々ある。上の無限小数による数列は、多々ある数列の中から特別なもの (代表元) を取っていることになる。

無理数をこのように解釈したとき、どんな無理数の近くにも無限に多くの有理数があることなどが具体的にわかる。つまり、無理数 $x=x_0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ に対して、n を大きくすると上記の数 $a_n\in\mathbb{Q}$ は、$0\leq x-a_n\leq\dfrac{1}{10^n}$ だから、いくらでも近づく。ここらあたりも、この解釈の強みでもある。

一方で、このように無理数を教えるとき、つまり、無限小数表示による代表元を指定して、実数全体の集合を決めたとき、問題になるのは、この代表元を使った形で、その和とか積の定義ができない、少なくとも、困難なことである。

なお、 有理数に比べて無理数の方がはるかに多い。これは、大学の集合論ででてくる Cantor の対角線論法やあるい代数学の体論に関係して代数的数全体が可符番集合であることから示される。

3．高校の指数関数

指数関数 a^x は、数の拡張と言うテーマには直接には属さないが、この関数を $x\in\mathbb{R}$ まで定義するためには、すでに中学校までに知っている x が自然数の場合からスタートして、x を整数、有理数、実数まで拡張してこの関数が定義でき、指数法則

$$a^xa^y=a^{x+y}$$

が成立することを学ぶことは、関数自体の重要性もさりながら、数の拡張にからんで、関数を拡張すると言う意味でとても意義深いのでここで取り上げる。

3.1．学習内容

中学校では自然数 n に対して a^n が a を n 回かけたものと定義され、指数法則が成立することを学んでいる。

高校では、まず、この n が整数まで拡張できて同じ指数法則が成り立つことを学ぶ。ついで、$a>0$ と自然数 n に対して a の n 乗根の存在が直感的に説明され、正の数 a に対して正の n 乗根を $\sqrt[n]{a}$ で表すことを学び、さらに、指数を有理数まで拡張して、指数法則が成立することを証明している。

次に、指数を無理数も含めた実数まで拡張するためには、無理数 p に対して、その無限小数表示 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ を取って、$a>0$ の有理数乗からなる数列

$$a^{x_0},\ a^{x_0.x_1},\ a^{x_0.x_1x_2},\ a^{x_0.x_1x_2x_3},\ \cdots$$

を考えて、この数列の極限値を a^p と定める。そして無理数も含めて指数法則が成立すると述べられている。

3.2．数学的構造と解説

高校では、中学と異なり、何が定義でどんな性質が成り立つかは、かなり、きちんと教えられている。しかし、数学的な厳密性でいえば、定義が定義として意味を持つためには、存在性の証明が必要である。

例えば、指数関数では、$a>0$ に対して $x^n=a$ かつ $x>0$ をみたす x の存在、無理数 p に対して、その無限小数表示 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ を取ったときの数列

$$a^{x_0},\ a^{x_0.x_1},\ a^{x_0.x_1x_2},\ a^{x_0.x_1x_2x_3},\ \cdots$$

の極限の存在などの保証が必要である。

更には、これらを認めても、無理数を含めて指数法則が成り立つかどうかは明らかではない。

これらは、いずれも、実数の性質から証明できる。

実際、大学の実数論の目的の一つには、指数関数を定義することがある。

補足であるが、$\sqrt{2}$ の存在そのものも論理的には問題である。中学では $\sqrt{2}$ は (ユークリッド平面上で) １辺が１の正方形の対角線の長さとして導入されている。しかし、非ユークリッド幾何学の発見以来、ユークリッド幾何学は自然の理ではなく、たくさんある幾何学の１つに過ぎないというように現在は考えられている。

$\sqrt[n]{a}$ の存在がそのような特殊なものに依存していては、困るのであるが、その存在はユークリッド幾何学に依存しているわけではなく、実数論だけで存在証明ができる。円周率についても同様であるがここでは説明を省く。

多くの大学では、微分積分に先立って実数論を学んでおり、今述べたことはその中で大抵説明されているのでここでの解説は省略する。たまに、大学でも、実数論を避けた形の微分積分が講義されているが、そのような場合にも、実数の話をある程度は習熟しておかねば、上に述べた存在とか性質の証明はできないし、高校の教科書の記述の意味を理解することも困難であろう。その意味でも、中学・高校の数学教師にとって実数論は不可欠な background である。

4. 高２の複素数について

4.1. 学習内容

中学で、その習熟度、定着度は別にしても、二次方程式の解の公式は学んでいる。問題つくりなどで、適当に二次方程式を作って解かせると、ルートの中が負になることがあるが、教科書や問題集ではそのようなことにならないよう細心の注意が払われている。

以前から複素数は高校で始めて学ぶことになっているが、今回の指導要領で、これまでの数学Ｂにあった複素数平面がなくなった。複素数そのものについては新しい指導要領では数学 II で扱っている。

複素数平面を教えないということは、複素数の理解もかなり異なってくる。最初は $i^2 = -1$ なるものを形式的に導入するが、複素数平面があれば、座標平面上の点 (a, b)(これが複素数 $a + bi$ に対応する) に、実軸上の点を (演算もこめて) これまでの実数とみなしたとき、その演算を平面全体まで拡大したものが複素数だと理解できる。

また、複素数平面がなくなったため、複素数の和や積の幾何学的意味も述べられていない。

複素数平面を出さないということは、中学校の負の数や無理数の紹介で数直線をふんだんに利用していることと比較して指導の一貫性にも問題を感じる。

4.2. 数学構造と解説

複素数とは、$i^2 = -1$ をみたす数を実数 $\mathbb{R}$ に付け加えて、それに和や積の演算を入れたものである。つまり、方程式 $x^2 + 1 = 0$ が解けるように $\mathbb{R}$ を拡張したものであるが、幾何学的には数直線 $\mathbb{R}$ の演算を平面 $\mathbb{R}^2$ に演算をこめて拡張したものとみられる。しかもこの拡張は、有理数から実数への拡張とは桁違いにやさしい拡張で、他の場合 (自然数から整数、整数から有理数) に比べても容易である。一方、これまでの拡張と異なり、大小関係は保持できない。

しかしながら、この拡張は他の拡張とは違った次元の重要な意味を持っていることをここで少し解説しておく。詳しくは、参考文献 [6] などを参照していただきたい。

複素数体 $\mathbb{C}$ は、上記のように $\mathbb{R}^2$ に和積を拡張したものと考えられるが、一方で、$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ と、実数係数の多項式全体を多項式 $x^2 + 1$ で生成される ideal による剰余環 (実際には体になる) とも定義できる。

このようにして作った複素数では、たった一つの方程式 $x^2 + 1 = 0$ が解を持つように作られたものにも関わらず、実はそこではすべての代数方程式が解を持つことになる。これがガウスによって示された代数学の基本定理である。

複素数のもっとも本質的な意味は次の公式 (Euler 公式) から読み取れる。

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

実数の世界では、なんの関係もない (と思っていた)、指数関数と三角関数は、複素数の世界で見ると実は本質的に同じものであった。

つまり、複素関数 $\exp(z)$ が級数

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

で定義され、$z = x + iy$ で、$y = 0$ つまり z が実軸上にある場合にはこれが高校でも学んだ指数関数 e^x(e は自然対数の底) になっていて、$x = 0$ つまり z が虚軸上にある場合は三角関数で表された関数の組 $\cos y + i \sin y$ となっている。上で述べた Euler 公式では、この $\exp(z)$ を e^z と表している。

つまり、この指数関数と三角関数の関係は複素数まで拡張して始めて見える関係である。その意味でも、数の本質は複素数にあると考えるのが自然であり、便宜的なものではないことを強調しておきたい。

後書きおよび参考文献

この小論を書くにあたって、主として参考にした教科書は以下のとおりである。教科書は種々たくさん出ており、すべてを見比べたわけではないが、ここで述べている内容は、下の教科書だけに適用されるものではなく、他の教科書にも通じる普遍性に配慮したつもりである。

1. 平成１４度版の中学校教科書 1 年、啓林館
2. 平成１４度版の中学校教科書 3 年、啓林館
3. 平成１４年度版の高校数学 I、 啓林館
4. 平成１４年度版の高校数学 A、 啓林館
5. 平成１４年度版の高校数学 II、啓林館
6. 佐藤英雄、複素数の世界、和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要、p.147–152, No.14(2004)