和歌山大学教育学部
教育実践総合センター紀要
No.16　2006

初等算数科教育法講義概要

On Lectures of Elementary Mathematics

遠藤　秀機　　佐藤　英雄

ENDO Hideki　　SATO Hideo

和歌山大学教育学部附属教育実践総合センター

初等算数科教育法講義概要

On Lectures of Elementary Mathematics

遠藤秀機（和歌山大学教育学部）
Hideki ENDO
佐藤英雄（和歌山大学教育学部）
Hideo SATO

概 要

教員免許法で定める算数の科目は二つある。一つは「算数」で算数の教科内容を取り扱い、もう一つは「初等算数科教育法」で教科の指導法を取り扱う。教育現場は千差万別であるから、教師は十分に教材を研究した上で、現実の児童生徒に適切な指導法を案出しなければならない。ちなみに「初等算数科教育法」なる科目名称は比較的新しく、以前は「算数教材研究法」だった。指導法は現実の教育現場に応じて変化すべきものであるが、教材研究はその前提となるゆえに普遍妥当性がある。内容論と方法論とは表裏一体でなければならない。両者を結びつけるものが教材研究である。大学における算数科教育法は教材研究に重きを置くのが正当である。

著者たちは過去２年間にわたって前後期計４期「算数科教育法」の講義を担当した。それを総括すれば、指導要領を敷衍して、小学校現場における算数教育指導につながる算数教材研究の基本的な考え方を示し、その実践例を提示したということになろうか。小学校教科の中で算数という教科をどのように位置づけるかを考えることは、算数科教育法の講義担当者の責任であるが、一方において各教科教育法講義担当者の相互理解を必要とする。そうしたことを念頭において、前半部では初等算数の内容を指導要領に基いて概括し、後半部では具体的な講義展開のうち主要なものを例示する。

【キーワード】指導要領、算数的活動、対話活動、算数の４領域、教材研究

1．算数の位置付け

1.1　指導要領と同解説

第二次世界大戦が終了するまでは、教科書はすべて国定だった。戦後 1947 年に学校教育法施行規則において各種学校の教育課程が定められ、各教科の内容及びその取り扱いについては「学習指導要領」で示されるようになった。その後、幾度かの改訂がなされ今日に到っている。現行の小学校学習指導要領（以下「要領」という）は平成 15 年 12 月に改訂されたものである。教科書は要領に基いて作成されるが、要領では、指導の順序については、学校において、従って教科書においても、適切な工夫をすることを許している。

平成 11 年 5 月に出された小学校学習指導要領解説算数編（以下「解説」という）は現行の「要領」の趣旨や内容を具体的に詳しく解説したものである。

「要領」も「解説」も現場での指導内容や指導法について、その基準を示すものである。大学での「算数科教育法」は教師になろうとする学生に対する講義であるから、要領と解説の示す内容について、第一に指導するのに先立って知るべき算数の背景、第二にすでに成人した者にとっては自明化した内容を理解することが児童生徒にとってはいかなる負担を感じるかを考察するのが重要な任務である。

ちなみに “算数” という教科名は 1941 年に登場した。それ以前は “算術” だった。算術はツルカメ算と

か流水算とかの具体的意味をもつ問題についての“計算術”という意味を持っていた。算術を越えた内容を教授する必要が生じ、拡大したその領域を指すために、この教科名が採られた。“算数”に対応する英語名として、本稿では“elementary mathematics”を選んだ。“arithmetics”は“算術”の意味に解されてよい場合があるが、現代数学では解析的手段によらない“数論”を意味することがある。以下に述べるように、算数は数学に必ずしも包含されるものではない。“elementary mathematics”と言うと mathematics の初等部分と受け取られる恐れもあるが、本稿ではこの英語名を採用した。

1.2 指導要領の示す算数の目標

算数の目標を「要領」ではワン・センテンスで述べている。その中に算数的活動なる用語が現れるが、これは平成 10 年 12 月告知の「要領」から新たに用いられるようになったものである。「解説」でもそうしているように、ワン・センテンスで述べられている内容を多少の字句を補足あるいは削除して分かち書きにすると下記のようになる。（このまとめ方は「解説」とは若干のズレがある。）ここで“算数的活動”は全項目にかかっている。

(1) 算数の学習や指導は数量や図形についての“算数的活動”を通して行う。
(2) 基礎的な知識と技能を身に付ける。
(3) 筋道を立てて考える能力を育てる。
(4) 数理的な処理を生活に生かす態度を育てる。

目標 (2) は社会人として絶対不可欠の実用的知識であり、(3) と (4) は算数の学習成果を教養の側面で捉えたときの目標である。

では、算数的活動とは何か。「解説」はその意味を例示的に述べているが、その目的は「算数の授業の中心を教師の説明から児童の主体的活動へ転換する」ことである。指導上の方法論は目標に密接に関係している。実際、「新しい学力観」では“評価の観点”を下記の順序で掲げている。

(a) 関心・意欲・態度
(b) 思考力（数学的な考え方）
(c) 知識
(d) 技能

目標の各項目もこれらの観点もいずれも相互に関係しているが、目標の各項目と評価の観点を対比すると、(2) が (c) と (d) に対応し、(a) と (b) が算数的活動と不可分に関わって、(3) と (4) に対応している。評価の観点の記載順に注意すれば、算数教育の重心を「知識・技能」から「関心・思考力」へと（程度はともかく）移動させること意図していることがわかる。かくして“算数的活動”なる用語が前面に出された。

明らかに算数学習の主たる対象は「数量や図形」である。上掲の「要領」の目標にはこれだけが具体的に記されている。このことを念頭に置けば、「要領」の目標は下記のように読むことができる。

算数の範囲とする知識と技能を、天下り的に教えるのではなく、算数的活動を通して理解させる。

以上、「要領」等に記載されている算数教育の目標を述べてきたが、元来、思考力重視は算数教育に於いては自明の目標であったし、算数的活動に相当する活動の重要性や必要性も周知のことだった。それなのに、なぜ教師の説明を中心とした授業形態になりがちなのか。算数的活動をいかなる形でいかにして機能させるか。結局は教材観及び児童生徒観を総合した教師の力量に問題は帰ってくるのである。

1.3 学習時の児童間の対話活動

例示を見る限り、「解説」で言う算数的活動は、児童が主体的に行う個人的活動である。それとともに小学校段階の児童に必要なのは、自己とは異なる論理を持つ他児童との対話活動である。個人的な算数的活動により「わかった」という感じをもつだろう。その感じを言語化して客観化する必要がある。そうしなければ、その感じは不安定であり続ける。小学校児童は自己のうちで言語化することに慣れていない。その代替行為が他児童に説明することであり対話活動である。算数的活動や対話活動を通して、独りよがり的な思い込みから脱却して客観的な知に到る。算数や数学の知識は環境や時代・社会（言語集団を含む）を超えた普遍的なものであるから、この種の活動の必要性はきわめて高い。これは算数に限らず小学校の全教科に通じることであろう。算数の指導要領や「解説」では言及していないのはそれゆえのことである。

こうしたことは数学文化史的にも検証できる。実際、数量や図形についての小学校段階における基礎的な知識と技能は、ほぼオリエントから古代ギリシャにかかる頃までに得られたものばかりである。文化史的に言えば、そこには自然的環境との対話があり、他者との対話があった。オリエント数学は実用の域を出ないとも言われるが、そこには自然的環境との対話

があり、狭い集団に限定されるが数学的技芸の競いあいがあった。古代ギリシャでは公共の場での討論が行われた。オリエントの獲得した数学的知識を基礎にして、論証的体系を持つ古代ギリシャ数学は成立した。

1.4　算数の４領域

「要領」では、算数の内容を
A. 数と計算、B. 量と測定、C. 図形、D. 数量関係の４領域に分けて、各学年次に分けてその目標及び内容を示している。数量関係は第三学年から記載されている。「解説」では次のように述べている。

「数と計算」の内容は、小学校算数の中心であり、学年進行に当たっては、低学年では特に「数と計算」の内容を重点的に扱い、学年があがるにつれて次第に「量と測定」、「図形」及び「数量関係」の内容を増やしていくようにする。

これらの領域の程度と範囲は次の通りである。

「数と計算」は算術の主内容を引き継ぐものであって、扱う数の範囲は正の有理数まで。「図形」は、三角形、基本的な四角形（正方形、長方形、平行四辺形、台形）及び円までで、形式的な証明を伴わない観察と操作活動とでこれに対処する。「量と測定」は生活に現れる種々の量を扱う。「数量関係」の内容は中学校や高校の確率統計と関数等につながるものである。

なお、中学校学習指導要領解説ー数学編ー（平成10年12月）では、その指導内容を下記の３領域に分けて述べている。

A. 数と式、B. 図形、C. 数量関係

「数と式」を小学校算数の「数と計算」を引き継ぐものと看做せば、算数の領域「数と計算」「図形」「数量関係」は中学校数学に引き継がれるが、算数の「量と測定」に対応するものがなくなる。この領域は小学校算数固有の特徴と目標を示しているのである。

1.5　教科配当時間数

過去３回の学習指導要領改訂での教科別・学年別配当時間数表からすぐにわかるのは下記の２点である。

(1) 総時間数は国語科がいちばん多く、算数科はこれに次ぐ。
(2) 算数科の時間数は学年進行とともに増え、国語科の時間数に近づく。

この状況は、多少の時間数や比率の変動があっても、過去３回の改訂に共通している。算数は「基礎教科」と位置付けられていることを示している。

各教科の配当時間数のバランス等の問題については、個別教科の教育法担当者ではなく、全般を見渡しての講義担当者が解説言及することを期待する。

1.6　算数学習の順序性

算数は小学校他教科と比して著しく系統性が強く累積効果も高いため、学習の順序性が重んじられる。個々の児童が、ある単元を理解しにくい場合、遡って自分が理解不十分な地点（単元内容）を自力で発見することは困難である。極端な場合であるが、例えば、病気等で長欠した児童の場合、欠席した期間の学習内容（以下、欠損部分という）をいかにして補完させるか。当の児童に自己学習力があったり、その家族に学習補助力があれば、欠損部分は次第にでも埋まることが期待できるが、そうでない場合は、

わからない $\Longrightarrow$ 努力ができない $\Longrightarrow$ やる気を失うの悪循環に陥る。

国語科の場合、特に問題となる欠損部分は“新出漢字とその意味”であるが、これは「個別的知識」であって、かつ、一回限りではなくその後も何度も出てくるため、次第に埋まりやすい。理科や社会科等については、小学校での内容は自然や社会環境への「関心・興味」を高めることが主眼で、その知識自体は中学校でも繰り返し出てくる。

他の教科と比して算数の場合には一度、興味・関心を失えば、それを回復することが難しくなる。こうして算数嫌いの児童が生まれる。

各単元の間の相互関係を教師が明確に意識することは特に算数指導の場合に必要となる。これも教材研究の一つである。

1.7　中学以降の数学との関係

小学校児童の発達段階では、抽象的思考はきわめて難しい。思考の対象となるものを具体的存在に結び付けて感性に訴えなければならない。概念も含め、考え方一般について、小学校児童に対する算数指導は、事物に即して意味論的になされなければならない。例えば、円や面積は天下り的に抽象的に定義するのではなく、

(a)「まる」→「まんまる」→「円」
(b)「広さ」→「面積」

のように段階を踏んでその概念を把握させる方法をとる。ただし、このような指導法がベストと主張するものではない。例えば「面積」は「広さ」の指標の一つに過ぎず、「広さ」には "使い勝手のよい形状" という感性的観念が付随している。そもそも面積はアプリオリな概念ではない。

この例の (a) と (b) ではいちばん左のものは数学的には定義できないのに対して、いちばん右のものは完全に数学的な概念である。このように算数では、第一に「感性的・経験的かつ個別的理解から論理的・概念的理解への転換」を主とし、第二に、その結果であるが、一般的な説明や証明を教条的には要求しない。これに対して、数学では概念から出発し方法は一般的である。裏返して言えば、概念的理解を要求することは、感性的理解の放棄を迫る一面を持っている。

小学校算数で出てくる数の範囲は「分数」（数学的には正の有理数）までで、従って、自然数に還元させて考えることができる。算数に限定すれば正当化される説明は、無理数までを対象とする設定では必ずしも正当化されない。算数に於いて「乗法は加法の繰り返し」とする説明も長方形の面積を「たて×横」とする説明も、算数で扱われる「量」が正の有理数の範囲に留まる限りに於いて正当化される。数学的には極限論法が必要となる。これは教師の心得であって、算数での実際の指導法を否定するものではない。

一般に、意味論的思考は無用であるのではなく、また低級なのでもない。ある壁を破ろうとするとき、先端の数学でも（高度な意味での）意味論的思考が必要になる。ただし、必要以上に意味論的思考に拘泥すれば、「こじ付け的理解」に陥る。その愚を避けるべく指導せねばならない。小学校では "よき感性を育てる正当な訓練" が必要である。

2. 大学での各領域の実践的解説

初等算数科教育法は講義の回数にして十数回である。ここに採録するのは実際に講義した内容の一部であるが、もとより膨大な算数の内容をすべて網羅することなど不可能である。講義は、冒頭の概要及び (1.1) で断ったように、教材研究できる力を養い、指導される児童の学習負担を学生に実感させることを目指し、形式は、小学校の "授業" の形を模し、講義者が発問し学生に回答させるようにしている。

2.1 数字・記数法

この小節では "数" とは "(正の) 整数" を指すものとする。

(1) 記数法

地球上に現れた名だたる文化は、いずれも何らかの記数法または数記録法を持っていた。記数法は文の書記体系と並ぶ社会的文化基盤である。文字文化を持たなかったとされるインカ文化もケープ（縄）によって数を記録していた。いずれもデータを記録・伝達するのに不可欠であり、知的活動においては、記憶にかかる負担を軽減し、予定・計画・立案に向ける余裕を生んだ。そのためにこそ記数法体系を必要とした。

現代、もっとも一般的に使われている数字は算用数字で、それは 0 及び 1 から 9 までの計 10 個である。それら単独の数字だけで表記できるのは、いわゆる一桁の "数" だけであるが、これら 10 個だけの数字を用いて、10 進法によりどんなに大きな数をも表わすことができる。例えば

$$203 = 2 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

このように数字 0 は無（零）を表わすと同時に、桁を表わす特別な機能をもっている。このようにして数を表記する方法を "算用数字式記数法" と呼ぼう。慣習上、この記数法は縦書きの文中では用いられない。

縦書きの文中では、ふつう漢数字を用いて数を表記する。例えば、203 は "弐百参" あるいは "二百三" と表わされる（"漢数字式記数法"）。この記数法では、算用数字式記数法における 0 に相当するものを欠いているために、桁を表わす漢数字を次々と必要とする。算用数字式記数法を模して〇を使って、二〇三（縦書き）のように書く場合もあるが、縦書きの文ではすぐに意味を捉えるのは困難である。

これら以外に、ローマ数字（I、II、III、$\cdots$）を用いた記数法もあるが、漢数字式記数法よりもさらに不自由で、きわめて限定的に使用される。講義では古代ギリシャの記数法も紹介しているが割愛する。

(3) 10 進法

学生は 10 進法による数表記、及び 10 進法による四則演算を知っている。2 進法についても知っている。講義では学生には不慣れな 3 進法による加法と乗法を体験させる。目的は、第一に 10 進法の原理を知らしめ、第二に児童生徒が掛け算九九等に戸惑うのがある意味で当然であることを納得させることである。

10 進法で 15 と表わされる数を 15[10] と表わそう。

このとき

$$15[10] = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0$$

右辺を 120[3] と表わす。これを 3 進法表示と言う。数字としては 3 種の数字（文字記号）0、1、2 だけを用い、10 進法における 10 を 3 に代えれば、10 進法と同様に、どんな大きな数も表示できる。

3 進法による加法と乗法は下記のようになる。

$$0+0=0\ ,\ 0+1=1\ ,\ 0+2=2$$

$$1+1=2\ ,\ 1+2=10\ ,\ 2+2=11$$

$$0\times 0=0\ ,\ 0\times 1=0\ ,\ 0\times 2=0$$

$$1\times 1=1\ ,\ 1\times 2=2\ ,\ 2\times 2=11$$

（交換法則を考慮して相当する部分は省略した。）

学生には $12[3] \times 21[3]$ 等を 10 進法を経由せずに計算させる。さらに、総括として 10 進法と 3 進法を比較させて 10 進法を理解させている。

2.2　数量の意味と機能

数量は具体的には何を表示・記録し得るのか。代表例をあげれば、

(a) 識別の指標（クルマのナンバー，学籍番号等）。
(b) 個数（人数等）。
(c) ものの大きさ（長さ，面積，体積，角）。
(d) 時刻，時間の長さ。
(e) 貨幣価値（円とかドル）。

これを見て気付くべきは、第一に具体的な数量には様々なカテゴリーがあること、第二にこのうち (a) は数字は文字記号の一種であることを示す特別なカテゴリーであること、第三に、それぞれのカテゴリーの数量に対して行い得る数的操作に制限があることである。列挙すると，

(1) 基数（「解説」の用語では “集合数”）と順序数の対立。((a) を見よ。)
(2) 離散量と連続量の対立。
(3) 具体的な数量には「単位」（ディメンション）が付く。
(4) 単位が異なる数量は加法及び減法ができない。
(5) 数量の大小の比較が可能なのは単位が同じものに限る。
(6) 単位を持つ数量についての乗法及び除法は、関係する３者のうち最低２つは単位が異なる数量。

(4) と (6) は「加法と減法」と「乗法と除法」が質の異なる演算であることを示す。また (6) は文章題を式に表わす場合、被乗数と乗数の区別を意識しなければならないことにつながる。

2.3　様々なグラフ

円グラフ、棒グラフ、帯グラフ、折れ線グラフ等は、よく見かけるグラフであるが、それぞれがどのような目的で使われるかを実感させるために学生に次の課題を出す。

(1.5) の（過去３回の指導要領改訂による）教科配当時間数の表を見て、各自が関心を持つことがらを、その表から読み取って、適当なグラフ（円グラフ、棒グラフ、帯グラフ、折れ線グラフ等々）を選択して表現すること。

この課題の目的は (1.5) で述べた２項を確認させるとともに、グラフはある意図をもって選択されるべきこと、また、その意図を十分に読み取る必要があることを実感させることである。

実際の指導においては、対象学年次の児童の持ち得る関心の実態を把握し、かつ関心の範囲をどこまで拡大させるべきかが考慮されなければならない。（宇田 [4] 参照）。

2.4　数の範囲

低学年で登場する数量は，基本的には (2.2) で述べたようなディメンションを持っている。従って、同じディメンションを持った数でなければ和を考えることは許されず、積については交換法則など意味がない。第３学年までは扱われる数の範囲は正の整数までだが、第４学年で “小数” や “分数” が導入される。小数や分数についての乗法や除法は第６学年で扱われる。全体としては正の有理数までである。

(1) 数の表わし方と数自体の性質

“分数” とは $a \div b (= a/b)$ のことだが、算数では a と b は整数である。従って、算数では “分数” とは “有理数” と同義であり、数の表わし方、数の性質の両面の意味がある。“小数” は算数では “数量の近似値（概数）” として現れる。実際 1/3 の小数展開表示は四則演算のためのものではなく、他の数との大小関係を知るためのものである。

(2) 通約可能量と有理数

数量aとbはある整数pとqがあって、$a:b=p:q$となるとき「a と b は "通約可能"である」と言う。例えば、$\sqrt{2}/3$ と $3\sqrt{2}/4$ は通約可能である。通約可能とは数量それ自体の性質ではなくその比の問題である。初期のギリシャ数学では、「任意の量aとbは通約可能である」と信じていた。すなわち、いかなる数も、ある単位の量を設定すれば、その整数倍になると考えていた。彼らの考えは "無理数の発見"により否定された。ギリシャ数学でいう "通約可能量"は現代数学の有理数なる概念に相当するとされるが、発想上では大いに異なる。現代数学では 1 は特定の数として固定されているが、ギリシャ数学にあっては単位の量は状況に応じて設定されるべきものだった。

(3) 四則演算

算数では正の整数から始まって四則演算によって到達できる正の有理数までを数の範囲とする。文字式は扱わないから四則演算の抽象的な考察はできないが、分配法則等は (2.5) で述べる面積代数で説明できる。

「乗法は加法の繰り返し」というテーゼは有理数の範囲で成立するが、これは分配法則の別表現である。実際,

$$\frac{2}{3}\times 4=\frac{2}{3}\times(1+1+1+1)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}$$

これは乗数が整数の場合だが、乗数が有理数、例えば、3/4 のような場合には、意味論的に

$$a\times\frac{3}{4}=a\times 3\div 4=a\div 4\times 3$$

を納得させれば、上述のことに還元できる。

「異分母の分数の加法」は、例えば、大学生でも $1/2+1/3=2/5$ のような計算をすることが報告されている。最大の問題は、このような計算結果が誤りだと気付かないことである。つまり、数量の意味や見積もりがまったくできていない。1/2 だけで半分あり、それに正の数を加えるのだから、半分よりも小さい 2/5 になるはずがない。次に単独の分数の意味が理解されていれば、同分母の分数の加法は容易に理解される。異分母の分数の加法が難しいと感じたとき「同分母の分数に直せればよい」と発想転換できればすでに解答は得られたことになる。異分母であっても分数は通約可能（(2) 参照）だから、その共通単位を探せばよい。このような対話・討論を児童の間で起こさせるのが教師の指導技術である。

学生に対しては $3/\sqrt{2}+\sqrt{2}/3$ を例にあげて,

$$3/\sqrt{2}=9\sqrt{2}/6\ ;\ \sqrt{2}/3=2\sqrt{2}/6$$

とやってみれば、共通単位としては $\sqrt{2}/6$ がとれ、

$$3/\sqrt{2}+\sqrt{2}/3=9\sqrt{2}/6+2\sqrt{2}/6=(9+2)\sqrt{2}/6$$

として、児童の戸惑っているポイントを体験させる。

小学生の問題としては有理数の範囲に留まるが，はじめから「異分母の場合には、分母の最小公倍数を求めて云々」と天下り式に教えるのは得策ではない。「同分母の分数に直す」ということが肝要である。既約分数に直すのは別の問題である。

2.5　面積代数

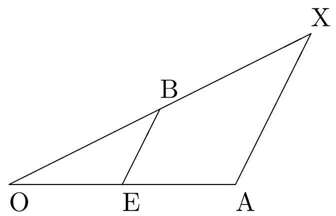
繰り返しになるが、オリエントから初期ギリシャまでに知られていた数の範囲は有理数に限定されていた。記号代数もこの時期には誕生していなかった。内容的に見れば、算数はオリエントから初期ギリシャ数学の段階に相当する。この時期の数学では、ディメンションの付かない抽象的な数の積に関わる演算諸法則は、以下に述べる "面積代数" によって考察していた。

(1) 数＝線分の長さ

原初的な数概念は個数に直接に対応する整数だった。小数や分数、数の大小関係などを通して、おぼろげながらも "数直線" の観念が芽生えた。こうして数概念は個数ではなく、むしろ "線分の長さ" と意識されるようになる。

(2) 線分の長さの積の作図

学生には「正の実数＝線分の長さ」と捉え、線分の長さの作図（定規とコンパスによる作図）で四則演算が実行されることを体験させる。乗法については下図の通りである。ただし、単位の長さ 1 は与えられているとする。除法については学生に課題として残す。



(3) 長方形の面積と長さの積

低学年次で縦の長さ a も横の長さ b も整数の長方形の面積を、それに含まれている縦・横ともに長さ 1 の単位の正方形の個数ということで指導し、ab をもってその長方形の面積とする。a 及び b が分数の場合の長方形の面積については、単位の正方形の 1 辺のスケールを小さくすることにより ab をもってそれらを 2 辺として持つ長方形の "面積" とすることには

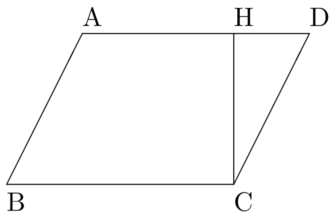
さして抵抗がないだろう。面積としては $ab = ba$ は自明である。

長さ a と長さ b を持つ２つの線分に対して長さ ab の線分を (1) の方法で作図する。これと長さ１を持つ線分とでできる長方形を作図すれば、その面積は ab である。こうして、長さの積の議論は長方形の面積に還元できる。

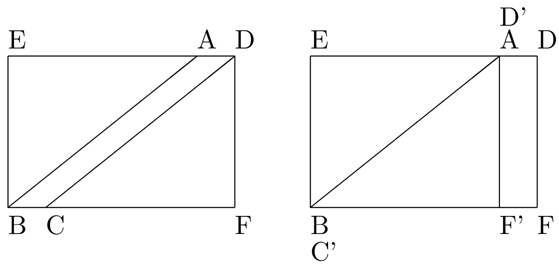
(4) 平行四辺形や三角形の面積公式

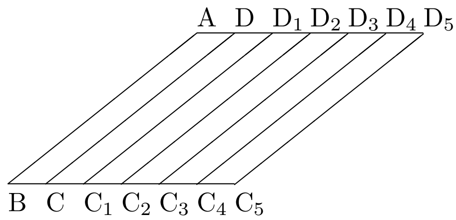
課題「長方形の面積公式から平行四辺形の面積公式を導け」

これに対して標準的には次の図で考える。



これには図を描いての考察で陥りやすい欠点が現れている。それを学生に指摘させ、欠点を克服するための対策として、次の２つの図を学生に提示する。





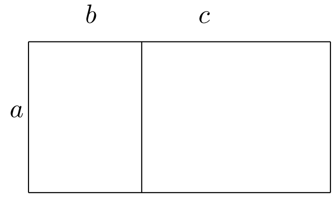
それぞれの図に対応する証明を学生に発表させる。その上で２つの方法を、「論理の難易度」、「発想の難易度」、「後の単元に出てくることとの関係」等の観点から比較させる。さらに次の課題を出す。

課題「平行四辺形の面積公式から三角形の面積公式を導け」

面積公式なる教材は、それが等式証明の手段（面積代数）となること（(5) 参照）、何が単純な図形でそれから複雑な図形をどのようにして構成するかという観点を養成する上で、有用かつ有益である。また，一つの教材について複数の指導法があるならば、どのような観点で実際の指導法を選択すべきかを（教師が）考えるのに恰好の題材である。

(5) 分配法則と展開公式

下図は分配法則 $a(b+c) = ab + ac$ を示している。

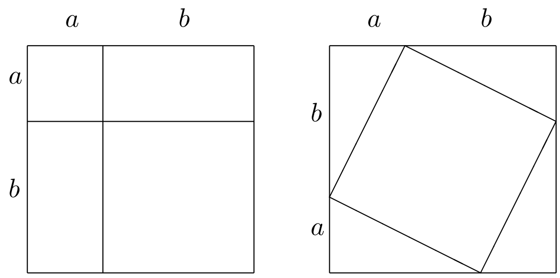


中学校数学で学ぶ他の展開公式も、長方形の面積公式を通して得られる。

課題 : $(a+b)^2$ と $(a+b)(a-b)$ についてやってみよ。

(6) 三平方の定理（ピタゴラスの定理）

下記の二つの図は三平方の定理を示している。



数なる概念は “個々の数の単なる集合” としてではなく、“演算を込みにした数体系” と意識されている。古代ギリシャでは「演算は作図で実現できる」から飛躍して「作図で得られるものは数である」という観念に行き着いた。その初期にあっては、いかなる数も通約可能であり、従って、正方形の対角線の長さはその一辺の長さと通約可能であると考えていた。それが誤りであると悟る契機になったのが、この三平方の定理だった。算数・数学教育に関わる者の教養として、この挿話を学生に紹介している。

なお、平行四辺形の面積公式についての授業実践については、池田 [5] を参照されたい。

2.6　直線が分割してできる領域の数

算数では文字式は扱わない。文字式は中学数学の「数と式」で扱われる。また、“論理的な証明の概念” は中学校数学の「図形」で扱われるから、算数の「図形」では、図形の観察とそれへの算数的活動に留まる。このように「数と計算」と「図形」については中学数学の対応領域との役割分担は明確である。「数量関係」については、関数の “概念” そのものは、むしろ算数での方が本質に迫っている。中学校や高校の数

学で扱われる関数は、具体的な解析的な式表示を持つものに限定されるからである。このような事情から「数量関係」については、教科書等ではあまり見かけない話題を教材化できる可能性が高くなる。教材化するに際しての危険性は、小学生が理解するには難しくなりすぎることである。その一例を紹介する。

テーマ ;　平面上に直線が n 本あるとせよ。それによって分割される領域の最大数を $f(n)$ で表わすとき $f(n)$ を求めよ。

テーマ提示に際し、雑にではあるが、必要な程度に "領域" の定義を説明している。

このテーマは下記の二つの部分に分けられる。

(A) 平面上に直線が $n(\geqq 1)$ 本あるとせよ。さらにもう一つ直線 ℓ を引いて，得られる領域の個数が最大となる条件は何か。

(B) テーマに言う $f(n)$ を n の式として表わせ。具体的には $n \geqq 2$ について、 $f(n) = f(n-1) + n$ となることを示せ。

(B) の眼目は帰納的に $f(n)$ が決定することを認識させることであるから、下記の (C) に置き換えてもよく、この形ならば算数の問題となり得る。

(C) $n \leqq 6$ について $f(n)$ を求めよ。

こうするとテーマの本質は (A) の図形的考察にあることが明確になる。そこで最初に (C) を問題として提示すれば、小学生でも大学生でも具体的に作業して $n \leqq 3$ までは、$f(n)$ を求めることができるだろう。$f(4)$ を求めようとすると、図が煩雑になるので一般的考察が必要になる。

$n \leqq 3$ の段階で，$f(n)$ の定義で 最大数 とした理由が薄々わかることを学生に期待した。具体的には

(D) 平面上に複数個の直線を引いて分割される領域の個数は、それらの直線の交点の個数と関係がある。

に気付くことを期待した。そうすれば，(A) は容易にわかり、また (C) もわかるはずだった。しかし、なまじ "数列" を予備知識として知っているために、多くの学生は (B) を使って (C) に解答した。

一般に、図形に関する話題は着眼点さえよければ、それこそ「目から鱗（うろこ）」である。しかし、それに正しく着眼するのは難しい。このことを学生に伝えるためならば、このテーマの選択自体は成功だった。しかし，このテーマを小学校算数の教材とする試みは失敗した。強引な説得話術がなければ、小学生に正しく着眼させることができないだろうからである。

このテーマの教材化は「数量関係」の授業実践（梅本 [6]）に触発されて行った。それよりはレベルを高くしたが、大学生よりも小学生の感性が豊かで柔軟である。これが筆者の率直な感想である。

3．課題

筆者は二人とも小学校あるいは中学校の現場での教育体験がない。児童の発達段階と算数理解の対応関係に確かな実感が欠けている。今後は、教育現場、特に附属学校教員との連携を強め、そうしたことを補強したい。

なるべく学生が興味を引くような面白いテーマ・教材を模索し、可能な限りそれを自前で調達したが、4領域で言えば「数と計算」はそのようなテーマを探すのがいちばん難しい。訓練的な部分がいちばん多く、無味乾燥になりやすい。逆に言えば、この領域こそ算数のもっとも基礎的な部分である。一時間ごとの授業を面白くする努力は必要だが、その裏でもっとも面白くないことを確実にやる努力が蔑ろにされてはならない。

学生にとって算数の内容は既知である。それゆえに「算数を教えるのは簡単だ」と思っている者がいる。しかし、これは正しくない。子供には基準にすべき知識を持っていないし、論理的な説明にも慣れていない。成人は経験や知識で頑なに身構える。そのために逆に、新しい知識や論理に対して、往々にして本能的に抵抗する。一方、子供は経験や知識という防具を身に付けていない。子供は豊かで柔軟な剥き出しの感性で対応する。算数に出てくる内容はもろに感性に結び付いている。算数教育を可能にしているのは、実は、子供の柔軟な感性ではなかろうか。

参考文献

[1] 小学校学習指導要領、平成 15 年 12 月

[2] 文部省、小学校学習指導要領解説、算数編、平成 11 年 5 月

[3] 文部省、中学校学習指導要領解説ー数学編ー、平成 10 年 12 月

[4] 宇田 智津、 出動！ ３Ｂ調査隊「表やグラフに表わそう」、 和歌山大学教育学部附属小学校紀要第 30 集 (2006) 57-60

[5] 池田 彦男、 面積の求め方を考えよう、 和歌山大学教育学部附属小学校紀要第 30 集 (2006) 65-68

[6] 梅本 優子、　ようこそ“レストラン４Ｂへ” ～テーブルといすのマジック～ 「変わり方」、 和歌山大学教育学部附属小学校紀要第 30 集 (2006) 61-64

なお、[1] の算数についての記述は平成 10 年 12 月告示のものと同じである。