和歌山大学教育学部
教育実践総合センター紀要
No.16　2006

中学校・高校数学の構造（2）

The Structure of Mathematics of Junior or Senior High Schools (2)

佐藤　英雄　　森杉　馨

SATO Hideo　　MORISUGI Kaoru

和歌山大学教育学部附属教育実践総合センター

和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要　No. 16　2006

中学校・高校数学の構造（2）

The Structure of Mathematics of Junior or Senior High Schools (2)

佐藤　英雄　　森杉　馨
Hideo SATO　　Kaoru MORISUGI
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

大学で学ぶ数学は，現場ではほとんど使われないとか，あんな難しいことは必要ないとか，中学校や高等学校での実践的な内容と大学での数学内容の乖離が指摘されている。

一方で，中高の数学，とりわけ中学校の数学では，その数学内容を教える際に生徒に受け入れられ易いよう様々な教育的工夫がされている。つまり，生徒が飲み込みやすいようオブラートにくるんだり，関心意欲興味を引き起こすように彩色されたり，余分な疑問を抱かせないよう植樹して中がもろには見えないようにするなどしている。このような教育的工夫は教育上は当然必要なものであるが，迷彩が施されたり，オブラートや植樹で包み込まれているため，その数学的構造が見えにくくなっていることも事実である。

この小論では，中学校高校の教材のどの部分が教育的配慮の工夫であるかを明らかにし，それを取り除いて見える教材の中の数学的構造を明らかにすること，および，その数学的構造が持っている問題点を指摘して，純粋の数学的立場からの説明はどうなのかを述べる。また，これらを理解する上で，大学で学ぶ数学がいかに役立つかも述べたい。

表題の中学校・高校数学の構造というのは，上に述べた，教育的配慮による構造，およびその理論的な数学的構造の２つをさしている。

今回は，第１部「数の拡張」[4] に引き続き,「幾何と論証」を中心に扱う。中学校や高校の「図形」に関しては，上に述べた「迷彩が施されたり，オブラートや植樹で包み込まれている」というレベルの教育的配慮ではなく，もっと根源的であり，教育的配慮がその論理構造まで変えているともいえる程の内容である。今回はこのあたりを明らかにすることを主目的とする。

キーワード: ユークリッド幾何学，合同，相似，証明，　定義，　教育的工夫，　数学的構造

1．直観と論証

中学校・高校で学ぶ「図形」は，少数の公理公準を元にして展開される古典的なユークリッド幾何学とは根本的に異なる。これは明らかに，教育という目的から意図された結果である。大学生がユークリッド幾何学を学ぶ場合では，古典的なユークリッドの「幾何学原論」[2] あるいは Hilbert の「幾何学基礎論」[3] など，少数の公理から出発して論理を展開することも可能であろうが，中学校の段階では，それは無理であろうし，また，教育的見地からすれば望ましいとはいえない。事実，現在では，世界のほとんどの国で,「図形」は学んでいても，古典的なユークリッド幾何を中学校レベルで教えているところはない。

一方で,「図形」指導の目的のひとつには「論証」指導が入っている。「図形」の性質などを学ぶために論理展開はこの「論証」と同じ意味ではあろうが，論理的な展開，論理の組み立て方，そのための定理などの命題の順番などを純粋に論理の側からみたものと，現在の中学校での「図形」教育は，時には相反する内容を持っている。

中学校「図形」の内容は，直観幾何と論証幾何と分けられることが多い。論証幾何の内容は，中学２年から始まり，1) 平行線と角の関係，2) 三角形の合同条件，をいわば公理的に扱ってそれを使って，二等辺三角形，直角三角形，平行四辺形などの性質を論証するもので

ある。中学３年になると，引き続き，1) 及び 2) に追加して 3) 三角形の相似条件などを追加して，これらを利用して，図形の性質や論証，更には，三平方の定理などを学ぶ。三平方の定理の証明も古典的なユークリッドの証明とはずいぶん異なるものが採用されている。後で，詳しく述べるが，中学２年から以降は「論証」のみでやっていけるかというと，実はそうではなく，中学２年にも中学３年でも,「直観」部分に頼らざるを得ない個所があり，図形指導は，この両者の相互補助に寄りかかっている。

論証幾何と異なり，直観幾何とは，論証に入る前の図形の扱い，具体的には，点，線分，直線，平面，及びそれらの位置関係，扇形や円の計量 etc の直観的な内容をさすと大まかには言えるが，実際にはそれだけではすまない。つまり，論証幾何らしい体裁は整えていても実際には論証にはなっておらず，直観に頼らざる得ない場面もあれば，逆に直観的な理解を促している場面でも，少し立場を変えると，立派な論証になっている場面もある。

例えば，中学１年の垂直二等分線や角の二等分線などの基本的な作図は，論証指導内容とはされていないが，図形の対称性に基づいた，ひし形などの図形の性質をもとにすれば，論証ともみることができる。

なお、数学には必ず直観が必要であり、大学の数学でも、あるいはどんな数学でも、それを考えているときは必ず、幾何学的直観などの何らかの物に寄りかかって考察されるのが実態であろう。つまり、直観とはいえ、それは検証されて、証明されたりあるいは否定されたりする。厳密な意味の論理展開ばかりでは、無意味な形式的な記号論理に陥る危険性さえある。

2．中学校数学「図形」

以下，現行の指導要領 [6][9] の下での，中学１年から高校までのいわゆる「図形」領域の内容を詳しく見ていく。

2.1．中学１年

中学１年の「平面図形」では，いろいろな図形について，観察，操作，実験などを通して，図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに，同時に，基礎的な知識・技能を修得して，それらを活用する。いわゆる狭い意味の幾何ではなく，図形の面積や体積といった計量面が多くはいっていることにも注目すべきである。

つまり，中学１年の内容は，２年の論証指導の準備的側面を持つと同時に，長さ・面積・体積を求めるといった計量面，とりわけ高学年になってもその説明が難しいと思われる，扇形などの弧の長さや面積などをも学ぶことになっている。

具体的は,「平面図形」では

1. 直線，線分，半直線
2. ２点間の距離
3. 角とその表し方
4. 三角形を書く
5. 垂直な２直線，平行な２直線
6. 点と直線及び平行な２直線の距離
7. 円，円弧，及び弦
8. 中心角
9. 中心角と対応する弧の長さの関係
10. 円の接線，接点
11. 図形が「合同」,「対応する」角や辺という意味
12. 中点，垂直二等分線
13. 線対称と線対称な図形の性質
14. 点対称と点対称な図形の性質
15. 作図の意味
16. 垂直二等分線，角の二等分線，垂線の作図

などの項目の中で，今後の「図形」考察の土台となる，ユークリッド的に言えば，公理公準的なものを感覚的に認めておこうという内容のものが入っている。これが中学２年の準備であろう。

明確には述べられていないが,「角」の大きさも，単位の呼び名は違っていても，線分の長さなどと同様，数量として表せることなどは暗黙の了承事項とされている。だから，角の n 等分の存在などは，問題にはならないと考えられる。一般的に，図形領域は，数学的にみても，純粋に教育的に見ても，どこまでが暗黙の了解事項とされているかが判別しがたいところがある。

平成 10 年以前の指導要領 [7] では，現在の線対称や点対称などは小学校で学んでおり，中学１年では，平行移動，回転移動，対称移動など，図形の移動を学び，移動してぴたりと重なるものを合同であると定義していた。現在の指導要領では，対称な図形という概念はあっても，２つの図形が対称という概念はなく，以前とは本質的に異なる。

なお，円の対称性や中心角と弧の長さの関係などは，単に基本的な図形の性質としてのもの以上に「計量」の根拠ともなっており，直観的理解だけではない理解もある程度は期待されているのであろう。

「空間図形」では

1. 平面の決定
2. 点・直線・平面の空間内での位置関係
3. 角柱，円柱，角錐，円錐
4. 回転体

この内容は，中学２年以上には，直接はつながっていない。むしろ，高校で場面により必要となるかもしれない立体感覚を植え付けておこうという趣旨であろ

うか？

空間内の位置関係に関して，２直線が「平行」という定義がキチンとはのっていない教科書もある (平面図形では書いてある) が，空間内の２直線の位置関係を，交わる交わらないという観点と同じ平面上にあるか否かという観点の２つから，ねじれの場合も含めて説明はされている。

直線と平面が垂直に交わることの定義は，その直線が平面上の無限個の直線と垂直に交わることを要求する，これはかなり難しい概念である。また，そのための十分条件である，適当な平面上の２つの直線とその直線が垂直に交わる，も述べられているが，生徒に説明するのはかなり困難であろう。

また，平面と平面のなす角などの定義がほとんど消えてしまっていて，教科書からは，何が定義で何がその性質かも読み取ることことも困難になっている。平面と平面のなす角などは，中学校で学ばないとなると，どこで学ぶのだろうか。

定義とその性質などを論理的にキチンと抑えるのは困難にしても，何か扱い方に不適切さを感じざるを得ない。

この段階では，生徒の持っている感覚が「定義」と一致していることを検証させ，生徒の感覚をより正確なものに高めていくことが望まれる。そのためにも定義を与えることが望ましいと思われる。なお，その際に，その定義の正当性 (well-defined) には深入りせずに，その性質も，論証ではなく，帰納的に生徒に納得させせたい。

「計量関係」では

1. 円周率，円周の長さ及び円の面積
2. 扇形の弧の長さと面積
3. 柱体，錐体の表面積及び体積

ここでは，小学校で学んでいる「円周率」を復習して，円の面積と周の長さを文字式で公式として表し，扇形の面積や弧の長さを計算する。また，その応用として，錐体や柱体の展開図と絡めて，それらの表面積などが求めらること，および，錐体などの体積公式を学ぶ。

面積や体積などの公式を使えることが主たる目的であり，その公式が成り立つ理屈は説明も困難であるので，直観的に認めさせている。だから,「論証」とは相当離れた内容である。

なお，ここの内容に関わって，平成１０年度指導要領からは，立体の見取り図や切断などの，図形の見方，調べ方などが弱くなっている。

2.2. 中学２年

中学２年では，

1. 角と平行線，対頂角，同位角，錯角
   平行⇔ 錯角，同位角が等しい
2. 多角形の内角・外角
   三角形の内角の和＝ 180 °,
   多角形の内角の和および外角の和
3. 三角形の合同
   合同なら，対応する辺の長さや角は等しい
   三角形の合同条件
   (a) １辺と両端の角
   (b) ２辺と狭角
   (c) ３辺相等
4. 証明，仮定，結論，根拠となることがら
5. 二等辺三角形，定義，命題の逆
   (a) 二等辺三角形 ⇔ ２つの角 (底角) が等しい
   (b) 二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する。
6. 直角三角形の合同
7. 平行四辺形の性質
   平行四辺形の性質とその逆
8. 長方形，ひし形，正方形
9. 平行線と面積
10. 円周角の定理

等を学ぶ。

2.2.1. 平行線と角

上の中学２年の三角形の合同条件までは，ほとんど証明なしに認めさせている。ユークリッド的に論理的に扱うなら,「錯角・同位角が等しい⇒ 平行」の証明には，図形の回転とその性質および「２点を通る直線はただ１つしか存在しない」ことが必要になるし，あるいはそれを直に出さなくても，ユークリッド原論 [2] のように，先に,「三角形のひとつの角の外角は他の２つの内角よりも大きい」ことを示しておく必要がある。逆の「平行⇒ 錯角・同位角が等しい」は，次の平行線公理と同値である。

ユークリッド原論には以下の５つの公理 (公準) が挙げられている：

(1) 点と点を直線で結ぶ事ができる
(2) 線分を延長して直線にできる
(3) 一点を中心にして任意の半径の円を描く事ができる。
(4) 全ての直角は等しい
(5) (平行線公理) 直線が 2 直線に交わり，同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると，2 直角より小さい角のある側において交わる。

最後の平行線公理は,「直線上にない一点を通り，その直線に平行な直線がただひとつある」などの言い換え

ができることが知られている。

本来，中学の図形を学ぶ目的からして，このようなことを教える必要はないであろうし，現行では，実際に同位角などを利用して「平行線」を書かせたり，逆に平行なら角度を調べて同位角・錯角が等しいことを生徒に素直を受け入れてもらうよう工夫されている。

次の，三角形の内角の和は，平行線と角の性質 (平行線公理＝「平行⇒ 同位角・錯覚は等しい」) をもとにして (「証明」という用語はまだ出てきていないが) 証明されている。厳密には，補助線の平行線がどの位置にくるかを調べておく必要があり，ユークリッド原論では，三角形の内角の和の話以前に,「三角形のひとつの角の外角は他の２つの内角よりも大きい」ことを示している。

「三角形の内角の和が 180 °」は平行性公理の下で成り立つ性質である。事実，平行線公理の成り立たない，非ユークリッド幾何学では，三角形の内角の和は, 180 °にはならないことが知られている。その意味では,「三角形の内角の和が 180 °」という命題と「平行線公理」は同値なのである。

なお，外角に関して，角の大きさに符号をつけたものは出てきていない。仕方のないことかも知れないが, 符号つきの外角の概念は難しいものではないし，符号を許容するならば,「どんな多角形 (凸でなくても) でも外角の和はいつも 360 °になる」という美しい定理が出てくるし，この話は，大学での，Gauss-Bonnet の定理という曲面に関する内容につながる。

昔の高校の教科書 [1] を見ると，いわゆるユークリッド幾何学に近いものが扱われている。この教科書では, 前半は，ほぼ，現在教えられているような展開がされており，その後，第 5 章「公理と証明」の中で，これまでの論理展開の根拠を振り返り，それらの根拠になるもとの公理などについても，丁寧に説明されている。以下の「合同」や「相似」の展開についても，ずいぶんと参考になる。

2.2.2 合同

三角形の合同条件では，新指導要領以前では，１辺と両端の角や２辺と狭角についてはある程度説明があり，３辺相等であればやはり合同になるということは, 論理ではなく，三角形を書かせるなどして納得させる仕様であった。

「３辺相等⇒ 合同」の証明は，少し準備を必要とする。実際，ユークリッドの証明では，先に，二等辺三角形の底角が等しいことを示して後に,「３辺相等⇒ 合同」を導いている。つまり，論理性から言えば，現行の教科書とは, 順序が反対になってしまうのである。現行教科書にある，二等辺三角形の底角についての，頂角の２等分線を引いた証明は，角の２等分線の存在が前提となっているし，角の２等分線の存在証明 (＝作図) は「３辺相等⇒ 合同」にあるので,「３辺相等⇒ 合同」の証明には使えない。

今まで，見たように，中学２年になって論証指導の当初から，教えるものにとって都合の悪いことは，常識を押し付け，別の場面では，証明が大事ですよと言っているといっても過言ではないほどである。

そこで，実際には，生徒がその不自然さに気が付かない，あるいは生徒に気づかれないような工夫や教育的配慮がされているのである。数式の領域でも幾多の教育的配慮はあるが, 教育的配慮が構造そのものを変えてしまうようなことはなく，図形教育の難しさがここにある。

教育的観点から言えば, むしろ，この段階で履修学年を変えるなどの時間を置いて，次に図形の単元に入るときに，これまでに，平行線と角の関係や三角形の合同条件を学んできた，これからはこれらを使っていろいろな図形の性質を調べましょうとする方が，生徒の抵抗，教師の気持ち悪さは少ないと思われる。実際, 今の高校では，中学校にややこしいところは全部押し付けて，それらを公理的に使えるので，ずいぶん楽なはずである。

さて，三角形の合同条件などを使って，二等辺三角形，直角三角形，平行四辺形，さらには，円周角の定理 (平成１０年に新指導要領で大幅に削減された) などは，形式的にみても論証指導ができるところである。

一方で,「平行線と面積」の単元は，何か孤立している。実際，この内容は，三角形の合同条件も平行線と角の関係も使われていない。１年で学んだ「平行な２直線の距離」および三角形の面積の求め方が使われているのみである。面積や体積は，小学校でも多少学んでいるが，それを求めることが目的であるのに反して, 中学では，図形の性質を調べる道具にもなる。

この,「平行線と面積」および３年で出てくる「相似」は，深い関係があるので，後で触れることにする。

円周角の定理の単元では，その逆および，円に内接する四辺形の性質などが今回の指導要領から消え，これらの内容は，高校１年に移った。しかし，例えば，方べきの定理と呼ばれる高校１年で学ぶものは,「円周角は等しい」と「２角が等しいなら相似」の直接的な利用に過ぎない。そのようなものを，わざわざ，義務教育からはずして高校にもっていくのは，系統性の分断であり，数学のよさをわざわざ壊していると言わざるを得ない。

2.3. 中学 3 年

中学３年では

1. 相似

(a) 相似，拡大，縮小
(b) 相似 ⇒対応する角の大きさは等しい，対応する辺の長さの比はすべて等しい (相似比)
(c) 三角形の相似条件
　i. ３組の辺の比
　ii. ２組の辺の比とその狭角
　iii. ２組の角
(d) 平行線と線分の比
　i. 平行⇒ 線分の比が等しい
　ii. 線分の比が等しい⇒ 平行
(e) 中点連結定理

2. 三平方の定理
(a) 三平方の定理とその逆
(b) 平面図形への応用
(c) 空間図形への応用

2.3.1. 相似

数学的にみて，一番気になることは,「相似」の定義があいまいなことである。一点からの中心拡大したもの (相似の中心，相似の位置など) が「相似」とされていた時期もあったが，中心拡大による定義では,「相似」なら，対応する角が等しいとか，対応する辺の長さの比が等しい (この内容は「平行線と線分の比」の内容そのものであるし，中点連結定理はその特別な場合である) を導くことが容易ではない。また，新指導要領では，小学校から，図形の「拡大・縮小」が中学校に上がってきて，今まで以上に「相似」の定義があいまいになっている。

「相似」の定義は，大きさは変わっても図形の形を変えないといったあいまいなままにしておいて，その性質として，対応する角が等しいとか，対応する辺の長さの比が等しいと述べている。これも，論証指導の材料としてはふさわしいとは思えない。相似な三角形の性質，三角形の相似条件を「相似」の定義を抜きにした形で生徒に押し付けることになるからである。

つまり，中学３年の図形の最初の単元である「相似」も決して論理的ではないのである。相似条件の応用として出てくる，また幅広い応用を持つ「平行線と線分の比」にいたっては,「相似」の定義によっては，循環論法とも非難されても仕方のない内容になっている。循環論法を避けようとすれば,「相似」の定義をはっきりとさせる必要がある。これまでにも，

1. １点からの中心拡大したものと合同
2. 対応する辺の長さの比および角の大きさがすべて等しい

などのいずれかが定義とされてきたが，教育的な観点からみてそれぞれに一長一短がある。合同については,「合同＝移動して重ねあわすことができる」という定義,だから，対応する角の大きさや辺の長さは等しいというのはすっきりしている。現在は，これの類似で，ほぼすべての教科書が「相似＝何倍かに拡大・縮小したものと合同」としている，拡大・縮小とは何かがやはり未確定なので，論理的とはいえない。もっとも,「合同」の定義にしても,「重ねあわせる」という内容も直観的なもので，厳密な意味では定義とは呼べない，しかし，生徒は，図形を動かすと言う感覚的なものは持っている。一方で，生徒にとって,「相似」の「拡大・縮小」の概念理解の程度は，この「重ねる」ということの理解のレベルとは異なり，説明の必要がないほど認識されているとは言いがたい，ここに,「合同」とは違った「相似」の問題点がある。

今一度繰り返すが，現状は，生徒は相似の定義を学んでいないといえる。それにもかかわらず,「２つの三角形が相似になる (十分) 条件」および,「２つの図形が相似なら，対応する角の大きさや線分の長さの比は等しい」を (ある程度) 納得させ，使いこなす指導が要請されているのである。本来は，どちらの命題の説明にも,「相似」とは何か (＝定義) が不可欠であるのに。

一方で，相似の単元の主目的を「平行線と線分の比」におくならば，別に「相似」などと云わなくても，２年の「平行線と面積」の関係をフルに使えば，ユークリッド原論で示されているようにそれで可能なのである。しかし，現行指導要領 [6] は，合同と同じように，三角形の相似条件を使った論証指導を求めている。

補足すると，上の相似の十分条件と必要条件をつないだ命題は，例えば,「2つの三角形の２つの角が等しいならば，対応する辺の長さの比はすべて同じ」となり，2つの三角形を残りの一つの頂点で重ねると，まさに，平行線と線分の比の関係そのものになり，これを，相似条件などを用いない証明が本来必要なのである。が，この証明自体の難しさおよび，指導要領による制約から，論理的構造の欠陥を知りつつも，教育的観点から，現行の多くの教科書は「相似」の定義を避けて済ませようとしている。一番の問題点は，教える側である教師のどの程度がこれに気がついているか，である。

相似の上の問題を避ける手立てはないわけでない。まず，図形は何倍にでも拡大縮小できることを認める。拡大縮小とは，対応する辺の長さの比および角の大きさがすべて等しいと定義する。この意味で，２つの図形が「相似」とは 一方が他方の「拡大・縮小」になっていると定義する。

この拡大・縮小図形の存在を認めると，三角形の相似条件の証明は容易である。例えば，二つの角が等しい２つの三角形ア及びイが与えられたときには，等しい角ではさまれる辺の長さの比で，一方の三角形アを拡大・縮小すれば，三角形の合同条件から，アを拡大・縮小したものはイと合同になる，よってアとイは相似

になる。他の相似条件についても同様である。つまり，拡大・縮小図形の存在さえ保証されていれば，これまでの通りの展開で循環論法は避けられる。しかも，拡大縮小すると言う相似変換の存在は, 重ねるという合同変換の存在と対比させてもそれほどおかしいものではない。

一方で，拡大・縮小の存在そのものは，生徒にどのように教えるかは別にして，必要なら中心拡大するということを実際体験させて，それが，拡大縮小になっているということを知らせることもできる。

また，体験ではなく論証しようと思えば，平行線と面積の関係などを使えば説明可能である。

事実,「相似」の中の循環論法を避けるために，explicit には書いていないが，上に述べた立場をとっていると見られる教科書もある。

もともと,「合同」とは，形も大きさもおなじ,「相似」とは，大きさは変わっても形がおなじ，と説明されるが，数学的に見ると，形とは何か，大きさとは何かというのは大問題である。とても厳密な意味で簡単に述べられる内容ではないので，中学校での図形の内容に数学的厳密性を求めるのは無理であろう。しかし，論証指導をするのだから，最低でも何を仮定してどのような結論が導かれるかの系統的な論理構造をはっきりさせる必要がある。その場しのぎの仮定を取り入れた構造にはならない配慮が望まれる。

2.3.2 三平方の定理

三平方の定理では，生徒に直角三角形を方眼に沿ってその頂点が格子点になるようにおいて，それぞれの辺の上にその辺を一辺とする正方形を書かせ，３つの正方形の面積を調べて，三平方の定理を発見させること，同時に，証明の糸口を捕まえさせるよう工夫がされている。その流れに従えば，展開公式 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ などを使った証明が自然であろうし，事実，ほぼすべての教科書はこの方法をとっている一方で，どの教科書にも, 古典的なユークリッドによる証明，相似を利用した証明，その他のいくつかの証明方法などが補足的に述べられている。

なお，三平方の定理の逆は，与えられた２つの長さを，直角をはさむ２辺とする直角三角形をつくり，それとはじめ三角形が３辺相等で合同になるとして，証明されている場合が多い。ただし，正確には，証明ではなく，具体的な長さを例にとった証明の例となっている。まったく同じように考えればキチンとした証明になるのであるが，キチンとした証明を書いている教科書は少ない。

ここまでが，論証であり，以後は，三平方の定理の応用である。ここで出てくる応用は，今後，高校に進学しても必要な基本的事項であり，単なる応用ではない。

三平方の定理は，ピタゴラスの定理とも言われる。ピタゴラスについては紀元前６世紀ごろに活躍した。「万物は数である」，つまり，数 (=自然数) は宇宙におけるあらゆる比率，秩序，調和を生みだす原理になると信じて，秘密結社を作っていたとされる。皮肉なことに，ピタゴラス自身が発見した三平方の定理から，自然数の比では表されない $\sqrt{2}$ を見出し, ピタゴラス教団の信条そのものを否定することになった。

ユークリッドは紀元前300年ごろの人で，幾何学の体系を作りあげると同時にピタゴラスをはじめとするそれまでの成果を体系として取りまとめたとされている。

3．高校

3.1．数学 I, 数学 A

数学 I では,

1. 三角形の三角比
2. 正弦定理と余弦定理
3. 面積など
4. 相似比
5. 球の体積，表面積

相似な図形の面積や体積と相似比，球の体積，表面積などは，以前は中学校でやっていた内容である。扱い方も，大体は中学校でのものと同じであるが一部は積分的な説明が見られる。

三角比の基本性質である，$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ は, 中学校の三平方の定理から導かれているし，余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ も，三角比の定義及び三平方の定理から導かれている。中学校では，直角三角形の辺の長さの間の関係，三平方の定理を学んだが，では, 直角ではない場合の関係はどう表されるかという意味で，余弦定理は面白い。

なお，この段階では，依然として角は正であり，0 から 180 °の間に限定されている。符号をこめたいわゆる一般角は，数学 II の三角関数で出てくる。

数学Ａでは

1. 三角形
   外分・内分，角と辺の大小，外心・内心・重心
2. ２円の位置関係
3. 円周角の定理の逆
4. 円に内接する四辺形
5. 接線と弦のなす角，方べきの定理

平成 10 年以前の指導要領 [7] では，1. を除いた，２円の位置関係，円周角の定理の逆，円に内接する四辺形，接線と弦のなす角など，ほとんどは，中学校でやっていた内容である。ここでは，中学校で学んだ,「角と平行線」,「合同」,「相似」を根拠として利用するだけ

であり，また，推論も難しくはなく，教師も生徒もやさしいと感ずるところであろう。

なお，三角形の角の二等分線の性質，辺 BC 上の一点 D について，

AD が∠Ａの二等分線　⇔　$AB : AC = BD : DC$

は，中学校で学んだ二等辺三角形の頂角の二等分線の性質の一般化として捉えることもできるし，また，その証明も中学校ですでに学んだことの組み合わせである。中学校，高校と履修学年，場所が異なるために，そのあたりを認識していない生徒が多いのは残念である。

3.2. 数学 II, 数学 B

数学 II では，

平成 11 年の指導要領 [9] の中の「(2)　図形と方程式」で,「座標や式を用いて直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に考察し処理するとともに，その有用性を認識し，いろいろな図形の考察に活用できるようにする。」とあり，いわゆる解析幾何の準備がされている。

数学Ｂでのベクトルでは

平成 11 年の指導要領 [9] の中の「(2)　ベクトル」で,「ベクトルについての基本的な概念を理解し，基本的な図形の性質や関係をベクトルを用いて表現し，いろいろな事象の考察に活用できるようにする。」とあり，平面上および空間内のベクトルとその演算，内積などを学ぶ。

高校のベクトルは，幾何学的ベクトルとして導入されるので，ベクトルの演算およびその性質は，中学で学んだ図形の性質に全面的に依存する。例えば，スカラー k とベクトルの和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ に関する分配法則

$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$$

は，中学校の「平行線と線分の比」の言い換えである。

一方で，数学Ｂの後半に出てくる，成分で表した数ベクトルで考えると，上の分配法則は自明となる。数ベクトル $\mathbb{R}^2$ は，実数の対 (x, y) 全体のなす集合で，この集合の元を点として，これに距離を普通に入れ，直線，面積，角度などの概念を導入すれば，ユークリッドの公理系をみたす空間ができる。これについて詳しいことは，[5] を参照 (ただし，[5] では $\mathbb{R}^2$ ではなく複素数 $\mathbb{C}$ として扱っている)。

なお，数学Ｂでの，ベクトルを用いた図形への利用では，ベクトル空間の公理系の中に，上に述べた種々の基本的な問題点が包み隠されているので，ベクトルの概念さえ身に付けておけば，論理展開は，数式の計算のごとく扱える。

4. 大学

和歌山大学教育学部では，このテーマ，ユークリッド幾何学に関する講義は現時点では行っていない。ただし，関連する内容は,「数学科教育法」などの講義の中で，必要に応じて講義されている。ユークリッド幾何学を，例えば，Hilbert の「幾何学基礎論」[3] などを使って論理的に講義あるいはゼミなどで学習することは不可能ではないが，大学生とはいえ，その論理は相当難しい。時間と手間，及び獲得できる成果とのバランスを考えると二の足を踏まざるを得ない。

中学校の図形の内容及び 2 次方程式 (できれば複素数も) などを使えば，定規とコンパスでの作図可能性については，作図可能数が体をなすこと，及び，２次拡大の繰り返しを行って得られる点 (＝複素数) は作図可能であること及びその逆は，比較的容易に，かつ中学校の図形の復習 (とりわけ「平行線と線分の比」など) を行いながら展開することができる。ただし，線形代数ではあまりやられていない，一般の体の上のベクトル空間の次元の概念が必要になる。作図可能数については，年度によって異なるが，上記の数学科教育法，初等整数論，その他の代数学関連の講義などで扱われている。

作図可能性定理の系として，図形的色彩の強いものに，正多角形の作図問題がある。簡単のため p は素数として，正 p 角形が作図可能であるためには p がいわゆるフェルマー素数 ($p = 2^t + 1$ の形の素数) であることが必要条件であることなどはわかる。これが十分条件にもなることを示すには，２次拡大の部分体の列の存在のためにはいわゆるガロア理論の一部が必要になる。

このように図形の性質，今の場合は作図可能性，を扱おうとすると古典的なユークリッド幾何学では解決できないものも多々ある。とりわけ有名なものが，ギリシャの三大作図問題である:

1. 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること（円積問題）
2. 与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作ること（立方体倍積問題）
3. 与えられた角を三等分すること（角の三等分問題）

前に述べたように，これらについてはある程度，講義等で解説されている。

一方，ユークリッド幾何の最大問題であった，平行線公理に関わって，非ユークリッド幾何学の存在やその model などについては，一部のゼミで卒業論文のテーマとして，学んだ経験がある程度である。

高校までのいろいろいろいろな数学，例えば，三角関数の微分積分など，様々なことにユークリッド幾何学が使われている。非ユークリッド幾何学の存在から,

ユークリッド幾何学はギリシャ時代に考えられたような絶対的な真理ではなく，単に，ある仮説 (平行線公理) をおいた場合の正当性を保証するという論理展開に過ぎないと考えざるをえなくなった。

それでは，中学・高校の数学が平行線公理を仮定しなければ正しくないのかと問われると，実際には，たいていは正しいのである。ただし，その説明は容易ではないし，膨大な論理展開と時間の浪費が必然となる。例えば，数学では，円周率とよばれる実数 π はとても大事な必要不可欠な数であるが，ユークリッド幾何学を避けようとすると，π の定義自体，Euler 関数

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots$$

の周期の半分として定義しなければならなくなり，およそ教育的ではなくなる。

このような意味で，あまり，ユークリッド幾何学を意識させない，高校までの数学の展開方法は理にかなっているといえる。つまり、大学の数学もやはり, 論理一辺倒ではなく、歴史的発展、教育的配慮等を考慮されて講義されているのである。

後書きおよび参考文献

この小論を書くにあたって，主として参考にした参考文献及び教科書は以下のとおりである。教科書は種々たくさん出ており，すべてを見比べたわけではないが，ここで述べている内容は，下の教科書だけに適用されるものではなく，他の教科書にも通じる普遍性に配慮したつもりである。

参考文献

[1] 数学 I，幾何編，大日本図書，末綱恕一他，昭和 33 年
[2] ユークリッド原論，共立出版（中村幸四郎他訳)
[3] ヒルベルト，幾何学基礎論，清水弘文堂 (中村幸四郎訳)
[4] 佐藤英雄, 森杉馨, 中学校･高校数学の構造 (1), 和歌山大学教育学部教育実践センター紀要, No.15, 2005, p.77–82
[5] 佐藤英雄，複素数の世界 (2)，和歌山大学教育学部紀要，教育科学，p.51–57, 第 56 集 (2004)
[6] 中学校学習指導要領 (平成 10 年 12 月) 解説 –数学編–, 文部省
[7] 中学校学習指導要領 (平成元年 3 月) 解説 –数学編–, 文部省
[8] 高等学校学習指導要領 (平成元年 3 月) 解説 –数学編–, 文部省
[9] 高等学校学習指導要領 (平成 11 年 3 月) 解説 –数学編–, 文部省
[10] 平成１４年度版の中学校教科書 1 年，啓林館
[11] 平成１４年度版の中学校教科書 2 年，啓林館
[12] 平成１４年度版の中学校教科書 3 年，啓林館
[13] 平成１４年度版の高校数学 I，啓林館
[14] 平成１４年度版の高校数学 A，啓林館
[15] 平成１４年度版の高校数学 B，啓林館
[16] 平成１４年度版の高校数学 II，啓林館