高校生に対する正多面体についての出張授業について

A lecture for high school students on regular polyhedrons

川上 智博（和歌山大学教育学部）
Tomohiro KAWAKAMI

概 要

本稿では、和歌山県立のある高校での正多面体についての出張授業の一例について報告する。

【キーワード】正多面体、正多角形、オイラーの公式

1．はじめに

本稿では、和歌山県立のある高校での出張授業の一例について報告することを目的とする。

数学の研究者（大学などの高等教育機関の教員）が高校生・中学生を対象とした数回完結型または一回完結型の出張授業を頼まれることが近年増えてきた。また、現代数学に触れ合うために、大学が高校生を対象とした講義を大学で行う機会も増えてきた。高校での数学は「学習」としてものであり、大学での数学は「学問」としてものである。

2008 年 12 月に行った出張授業は 50 分授業を 2 回を一日で行い、その翌週に 50 分授業を 2 回行うものであった。出張した回数は 2 回で、50 分授業を 4 回行って完結したものである。今回の出張授業はサイエンスパートナーシッププログラム (SPP) によるものである。高校 2 年生の理系のクラスを対象としている。

初回の計画は以下である ([1])。正多面体が５つしかないことはギリシャ時代から知られていることであり、知識として聞いたことのある生徒も多いと思われる。しかし実際のところ、正多面体を作成した経験のある生徒はほとんどいない。したがって空間図形は大変苦手な分野であるようだ。まず、生徒をグループ別に分け、教具を用いて正多面体の可能性を探らせる。可能性のある正多角形はごく限られていることをこの教具を使って、グループ活動の中で気づかせる。そのあと講師から、歴史的なお話や、オイラーの公式等のお話をしていただき、さらに精密な検討を加えて正多角形が５つしかないということを理解させる。

二回目の計画は以下である ([1])。画用紙に印刷した正多角形ののりしろ付き展開図（5 種類全て）をこちらで用意しておき、各生徒に配布する。手先の器用さには個人差があり、時間内にうまく完成できない生徒もいると予想するが、前半のほとんどは（50 分程度）のりとはさみを用いた製作の時間となるであろう。後半 50 分は特に正八面体・正十二面体を取り上げ、その体積を求める。この際、画用紙で作ったモデルは紙でできているため、見えない部分をイメージしにくい。そんな場合には３Ｄジオシェイプをみながら両方を使うと考えやすい。一人にひとつの３Ｄジオシェイプは予算的に無理だが、数個を生徒の間で順にまわして確認しながら計算させることはできるであろう。計算で、これまで学んだサインやコサインが登場し、三角比が大いに役立っていることを理解させたい。

正多面体の概略は [3]、正多面体の展開図は [2] を参考にした。

2．一回目の授業方法

正多面体の製作も行ってもらうために、大きな机のある情報教室で行った。生徒参加型の授業を行うために、正多面体の展開図・のり・はさみのほかに生徒達の座席表、ワークシート等を用意してもらった。授業の題目は「正多面体について」とした。正多面体の製作に時間がかかることがわかっていたので、授業はパソコンの画面をスクリーンに映し出すことによって行った。

まず、著者の自己紹介から始めた。高校側の担当者が著者の大学の先輩であるので、そのことを紹介すると生徒達が興味をもった。授業の中で、いろいろ問いかけを行って生徒達を指名して答えてもらった。重要と思われることは、しばらく待って、ワークシートに書き込んでもらった。

続いて、正 n 角形とは、n 本の辺の長さが等しく、すべての内角が等しい多角形である。正 n 角形を総称して、正多角形という。三角形の場合は、3 本の辺が等しければ、3 つの内角もすべて等しくなるが、四角形の場合は、4 本の辺が等しくても、4 つの内角もすべて等しくなるとは限らないことを説明した。

正多角形は線対称の図形であり、正 n 角形に対称軸は n 本ある。また、正偶数角形は点対称の図形でもある。辺の数が同じ正多角形どうしは全て互いに相似である。

互いに相似なものを除いて、正多角形は何個あるでしょうか？という問いかけを行った。生徒達を指名していったが、なかなか正解にたどりつかなかった。正解は 3 以上の自然数に対して、正 n 角形が存在するので、無限個である。

次に多面体の定義をした。高校 2 年生なので、空間図形はあまりなじみがないようであった。

多面体を構成する平面は、多角形である。それらを面といい、その面の境界を辺といい、辺の端点を頂点という。

穴のあいていない多面体に関して、オイラーの公式と呼ばれる次の公式が成立する。

頂点の数 - 辺の数 + 面の数 = 2。

穴のあいていない多面体とは、正確に述べると、二次元単位球面 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$ と同相になる多面体のことである。同相ということの定義は厳密には説明できなかったが、球面については、生徒達は既習であったために、よく理解できた。

穴のあいている多面体に対しては、穴の数を g とすると、オイラーの公式は、

頂点の数 - 辺の数 + 面の数 $= 2-2g$ となる。

穴のあいている多面体の具体的な例として、大きな直方体に直方体の穴があいている多面体の場合に、頂点の数 - 辺の数 + 面の数 = 0 となることを確かめた。

正多面体とは、有限個の面で囲まれており、すべて面が合同な正多角形からできており、かつすべての頂点において接する面の数が等しい凸多面体である。

正多角形は、相似となるものを同じとみなして、無限個存在するが、正多面体はどうだろうか？という問いかけを行った。何人かを指名して解答してもらったが、なかなか正解は得られなかった。

まずは、正多面体の具体例を挙げた。

(1) 正四面体

正四面体とは四枚の正三角形を組み合わせて構成された多面体である。辺の数は六本、頂点は四個ある。正四面体の一辺の長さを a とすれば、その表面積は $\sqrt{3}a^2$、体積 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ である。

(2) 正六面体（立方体）

正六面体とは六枚の正方形を組み合わせて構成された多面体である。また、立方体ともいう。辺の数は十二本、頂点の数は八個ある。向かい合う面どうしは平行であり、隣り合う面とは互いに垂直に交わる。正六面体の一辺の長さを a とすれば、その表面積は $6a^2$、体積 a^3 である。

(3) 正八面体

正八面体とは八枚の正三角形を組み合わせて構成された多面体である。辺の数は十二本、頂点の数は六個ある。また、向かい合う面どうしは平行になっている。正八面体の一辺の長さを a とすれば、その表面積は $2\sqrt{3}a^2$、体積 $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ である。

(4) 正十二面体

正十二面体とは十二枚の正五角形を組み合わせて構成された多面体である。辺の数は三十本、頂点の数は二十個ある。また、向かい合う面は平行になっている。正十二面体の一辺の長さを a とすれば、その表面積は $3\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2$、体積 $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$ である。

(5) 正二十面体

正二十面体とは二十枚の正三角形を組み合わせて構成された多面体である。辺の数は三十本、頂点の数は十二個ある。正二十面体の一辺の長さを a とすれば、その表面積は $5\sqrt{3}a^2$、体積 $\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$ である。

ここまで授業したところで 50 分が終了し休憩時間となった。10 分休憩のあと、5 つの正多面体の展開図を配り、製作してもらった。情報教室での授業であるから、インターネットで正多面体の展開図を見つけ出して、それを印刷して製作してもらいたかったが、時間的に無理があった。このため、あらかじめ五つの正多面体の展開図が印刷された厚紙を用意してもらった。一日目の授業の 2 時間目は正多面体の製作を行ってもらったが、時間内に完成できない生徒もいた。二日目には、正四面体と正八面体の体積を求めてもらうので、製作してもらった正四面体と正八面体に名前を書いてもらったのち、回収して、高校側の担当者に預かってもらった。それ以外の正多面体については、未完成であっても、生徒達に持って帰ってもらった。

正多面体の辺だけの模型も用意してもらった。これは、二日目の授業のときに、正四面体と正八面体の体積を求めてもらうときに役立った。

3．二回目の授業方法

正多面体の個数について説明した。

面を正 n 角形、ひとつの頂点に集まる面は r 枚とする。集まる面は三枚以上でないと多面体はできな

いので、$n \geqq 3, r \geqq 3$ となる。自然数の組 (n,r) が決定していけばよい。

一つの頂点に集まる面の内角の和は、2π よりも小さくないといけなので、

$$r \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} < 2\pi$$

となる。この不等式を変形していく。

$$rn - 2r - 2n < 0。$$

$$(r-2)(n-2) < 4。$$

となる。$n \geqq 3, r \geqq 3$ でこの不等式を満たす (n,r) の組は、$(n,r) =\ (3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5)$ となる。これらの組に対して、面の数をオイラーの公式

頂点の数 - 辺の数 + 面の数 = 2　から計算する。

$(n,r) = (3,3)$ のとき、面を x 枚とすると、

$$3x/3 - 3x/2 + x = 2$$

なので、$x = 4$ となり、このときは、正四面体に対応する。以下、それぞれ正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体に対応する。

以上により、正多面体は、五個しかありえないことがわかった。すでに五個が存在するので、これらに限ることがわかったことを説明した。

次に正四面体の体積を求めることにした。そのためには、一辺が a の正三角形の面積が必要となる。対象となっている生徒が高校二年生なので、正三角形の面積は、$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ となることがわかっているものと考えていた。生徒達に指名して答えてもらったが、なかなか正解が得られなかった。そのため、正三角形の図をかいて、高さから求めてもらった。高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ になることがわかって、正三角形の面積が $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ となることを説明した。

正四面体は底面が正三角形の三角錐であるので、その高さを求めれば、体積を求めることができる。高さを求める前に、生徒達が製作した正四面体を上から眺めてもらった。頂点から底面に垂線を下ろしたとき、その足がどこにくるか考えてもらった。生徒達を指名して解答してもらった。何人かを指名したとき、垂線の足が底面の正三角形の重心にくることを見つけてもらった。三角形の重心は、三つの中線の交点であるが、その内分比を、生徒達を指名して答えてもらった。これはすぐに正解が得られ、2 対 1 であることがわかった。正四面体を垂線と底面の一つの頂点を通る平面で切ってできる三角形に注目して、垂線の長さ、すなわち高さを求めてもらった。高さは、$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ であることがわかった。角錐の体積は、$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高さ なので、正四面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ であることを説明した。

次は、正八面体の体積を説明した。正八面体を縦において考えて、正方形の部分で切ると、上下は合同である。このことを製作してもらった正八面体で説明した。正方形を底面とする四角錐の体積を考えて、2 倍すればよい。だから、正八面体の上半分の四角錐の高さを求めればよい。これも正四面体のときと同様に、生徒達が製作した正八面体を上から眺めてもらった。頂点から底面に垂線を下ろしたとき、その足がどこにくるか考えてもらった。正方形の中心（対角線の交点）にくることを説明した。正八面体を垂線と底面の一つの頂点を通る平面で切ってできる三角形に注目して、垂線の長さ、すなわち高さを求めてもらった。正八面体のときは、この三角形は直角二等辺三角形になるので、$\frac{1}{\sqrt{2}}a$ となることが、生徒達が比較的簡単に発見できた。角錐の体積は、$\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高さなので、正八四面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ であることを説明した。

以上で授業内容が終了した。終了時刻の 30 分前であった。その後、SPP のアンケートと著者個人のアンケートをとった。SPP のアンケートは、記入内容が多く、考えていた以上に時間がかかった。アンケートは 15 分くらいを想定していたので、残り 15 分で著者の高校時代の話を雑談として話し、終了する予定でいた。アンケートに 30 分かかって、著者の高校時代の話はできずに終了した。

4．謝辞

出張授業を行う機会を与えてくださった和歌山県立耐久高等学校の上田芳裕先生に感謝します。

参考文献

[1] 上田芳裕、SPP 申請書 (2008).

[2] 空間図形、http://www.osaka-shoseki.co.jp/kyoka/suugaku/pdf/1-6/seitamentai.pdf.

[3] 正多面体、フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』.