微分係数と単調関数

遠藤秀機（和歌山大学教育学部）
今岡光範（和歌山大学教育学部）
貴志一男（和歌山大学教育学部）

1．微分学の目的の一つは，微分係数を用いて関数のグラフの変化の様子を調べることである。そのような結果の一つとして，次の定理はよく知られている。

定理A　関数　$f(x)$ は，閉区間 $[a, b]$ で連続で，開区間 (a, b) で微分可能であるとする。このとき，

（1）(a, b) でつねに $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で単調増加である。
（2）(a, b) でつねに $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で単調減少である。
（3）(a, b) でつねに $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で定数である。

上記の定理Aを証明するのには，普通定理Aの仮定のもとで成立する，次の平均値の定理を用いる。

定理B（平均値の定理）　関数　$f(x)$ は，$[a, b]$ で連続で，(a, b) で微分可能ならば

$$(f(b)-f(a))/(b-a)=f'(c),\quad a<c<b$$

を満たす点 c が存在する。

定理Bを用いると，例えば定理Aの（1）は，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ とすると，定理Bより

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\quad x_1<c<x_2$$

を満たす点 c が存在する。仮定から $f'(c)>0$ であるから $f(x_1)<f(x_2)$ である。定理Aの（2），（3）も同様に示される。以下定理A，（1）の場合に限って話を進める。

さてここで問題にしたいのは，平均値の定理を用いないで，定理Aをどのように説明するかということである。これは少し面倒なことである。

2．面倒にしているのは，次のような現象が起こるからである。

定理C　関数　$f(x)$ は点 a の近傍で定義され，点 a で微分可能で，かつ $f'(a)>0$ する。このとき，$f(x)$ は点 a で増加の状態にある。すなわち，十分小さい $h>0$ に対して，次の式

が成り立つ。

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$$

しかし一般には，$x=a$ の近傍で，$f(x)$ は単調増加でない。

証明　h が0に近づくとき，$(f(a+h)-f(a))/h$ は　$f'(a)>0$ に近づくことより，$h>0$ が十分小さいときは，

$$(f(a+h)-f(a))/h)>0,\quad (f(a-h)-f(a))/(-h))>0.$$

したがって　$f(a+h)-f(a)>0$，かつ $f(a-h)-f(a)<0$．すなわち

$$f(a-h)<f(a)<f(a+h).$$

定理の後半は，$f'(a)>0$ でかつ a の近傍で単調増加でないような関数　$f(x)$ の例をあげればよい。いま，$x=0$ のとき　$f(x)=0$，$x\neq 0$ のとき　$f(x)=x+2x^2\sin(1/x)$ とする。このとき微係数の定義より $f'(0)=1$．したがって，定理の前半の結果より，十分小さい $h>0$ に対して，$f(-h)<f(0)<f(h)$ となる。ところが $x\neq 0$ のとき $f'(x)=1-2\cos(1/x)+4x\sin(1/x)$．したがって x が0に近づくとき，$f'(x)$ は，-1 から3までのどのような値をもとる。したがって $f(x)$ は，$x=0$ の近くで無限回増減をくりかえす。

3．上記定理Cの結果を踏まえて，高等学校で使用されている「基礎解析」の教科書を見ると，この部分の説明には，かなり苦心されていることがわかる。

ある教科書では，定理Cの前半で述べた結果から，「したがって，ある区間でつねに　$f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で単調増加である。」と説明している。この説明のギャップを埋めると，例えば次のようになるのであろうか。説明を簡単にするために，関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で微分可能で，かつ $[a,\ b]$ で $f'(x)>0$ とする。

いま，$a\leqq x_1<x_2\leqq b$ を満たす任意の二点 x_1，x_2 をとる。$f(x)$ は，各点 $\alpha\in[x_1,\ x_2]$ で増加の状態にあるので，十分小さい正数 h に対して，y_1，$y_2\in V(\alpha)=\{x:\alpha-h<x<\alpha+h\}$ で，かつ $y_1<\alpha<y_2$ ならば $f(y_1)<f(\alpha)<f(y_2)$ となる。もちろん正数 h は点 α によって変わりうる。また，$\alpha=a$ のときは $V(a)=\{x:a\leqq x<a+h\}$，$\alpha=b$ のときは $V(b)=\{x:b-h<x\leqq b\}$ とする。

$[x_1,\ x_2]$ は有界閉集合で，かつ $\cup\{V(\alpha):\alpha\in[x_1,\ x_2]\}\supset[x_1,\ x_2]$ であるので，n 個の点 $\alpha_1=x_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_{n-1}<\alpha_n=x_2$ が存在して，$\cup\{V(\alpha_n):n=1,\ 2,\cdots n\}\supset[x_1,\ x_2]$ となる（ハイネ・ボレルの定理）。ゆえに $f(x_1)=f(\alpha_1)<f(\alpha_2)<\cdots<f(\alpha_n)=f(x_2)$．したがって求める結論 $f(x_1)<f(x_2)$ を得る。

また別の教科書では，「関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，点　$P(a,\ f(a))$ をとると，Pに十分近いところでは，グラフは，Pにおける接線とほとんど一致しているものと，みなすことができる。したがって定理Aの（1）が成り立つことがわかる。」と説明している。

それからまた，別の教科書では，「関数 $y=f(x)$ について，x の値が増加するとき，y の値が増加したり，減少したりするようすは，そのグラフが，右上がりか，右下がりか，つまり，接線の傾きの正，負とむすびつけて考えることができる。例えば，$y=\cdots$ と具体例を挙げて

説明し，したがって定理Ａが成立していることがわかる。」と説明している。

以上に述べたっことは，手元にある二，三の教科書について調べ，参考までに述べたものである。指導要領では，生徒の数学的成熟度に応じて，図形的な直感や明確な事例を通じて微積分の概念と計算の手法を理解させ，その豊かな応用を導くことが「基礎解析」および「微分・積分」の主眼としているのであるから，定理Ａを説明しようとすれば，上の教科書のようになるのであろう。筆者もよりよい説明のできる案を持っていない。

4．高等学校では，将来特に数学を必要とする方面に進む生徒に原則として「基礎解析」を履修させた後に，「微分・積分」を履修させることになっている。「微分・積分」の教科書では，平均値の定理（定理Ｂ）を述べ，その一つの応用として，定理Ａを再びとりあげている。その平均値の定理の説明は，当然のことながら教科書によって異なっている。

ある教科書では，「閉区間Ｉで連続な関数ｆ（ｘ）は，Ｉで最大値と最小値をとる。」という定理を述べて，定理Ｂを説明する。大学での微積分の講義は，大体この方法をとる。もっとも上記の連続関数の性質の説明には実数に対する深い考察（実数の連続性）を必要とするので，対象学生，対象学年によって証明を与えたり，与えなかったりするが。

また別の教科書では，「関数　ｆ（ｘ）は［ａ，ｂ］で微分可能であるとき，曲線ｙ＝ｆ（ｘ）上の２点Ａ（ａ，ｆ（ａ）），Ｂ（ｂ，ｆ（ｂ））をとると，この曲線上のＡとＢの間の，少なくとも１つの点で直線ＡＢに平行な接線を引くことができる。このことは図によってわかる。よって平均値の定理が成立する。」とする。

5．「基礎解析」では，この平均値の定理を取り上げないことになっているようであるが，４の後者のような直感的な平均値の定理の説明を，生徒にあたえては如何なものであろうか。３で引用したような教科書の説明と比較して，難しさではあまり変わらないように思うのであるが。そうすると（重要な）定理Ａの説明は，１で述べたように，わりあい滑らかにできるように思えるのであるが。それから更に「基礎解析」から「微分・積分」への移行にも少しは役に立つであろうし，また，「微分・積分」を学習しない生徒に（微分学の重要な）平均値の定理にふれる機会ができると思うのであるが。

しかしながら「基礎解析」を学習する段階で，定理Ｃの後半で述べたような例を挙げて問題意識をもたせる時間的余裕がないであろうし，問題意識を持っていない生徒に，平均値の定理を用いた説明の方がよりベターであると言っても，もう一つピンとこないであろう。ただ，これから高等学校の数学の先生になっていく人達に，教科書には，かなりあいまいにしか説明できないところがある一つの例として述べた。少しでも参考になれば幸いである。