

高校生に対する指数関数についての出張授業

A lecture for high school students on exponential functions

川上 智博 (和歌山大学教育学部)

Tomohiro KAWAKAMI

概要

本稿では、和歌山県立の高校での指数関数についての出張授業の一例について考察し、その成果と課題についてまとめる。

【キーワード】指数関数

1. はじめに

本稿では、和歌山県立の高校での出張授業の一例について考察し、その成果と課題についてまとめる。

大学等の高等教育機関の教員が、高校生・中学生を対象とした数回完結型または一回完結型の出張授業を行うことが近年増えてきた。高校生が現代数学に触れ合うために、高校においての大学教員による出張授業を受ける機会が増えてきた。また高校生・中学生が大学において、特別授業を受ける機会も増えてきた。

2011年9月に行った出張授業は50分授業2回を一日で行い、その翌日に50分授業を2回行うものであった。総授業時間は、200分であった。今回の出張授業はサイエンスパートナーシッププログラム(SPP)によるものである。高校2年生の理系のクラスを対象とし、生徒参加型の出張授業を行った。音楽と関連させて、指数関数を学習するのが目的である。この出張授業に関する記事が、高校が発行する平成23年度マンスリータイムズ9月号に掲載された([4])。著者による過去の出張授業は、[3], [2]がある。

初回の計画は以下である([1])。高校側の担当者から著者の簡単な紹介を行う。その後の進行は著者に任せる。ただしティームティーチングの形で高校数学科教員がサポートする。ドレミパイプという簡単な楽器を使った提示実験をする。これで音程を聞いてもらって長さが半分だと1オクターブ高い音が出ることを確認する。本来なら精密なオシロスコープを購入したいが高価すぎるので、今回はノートパソコンに音源

の波形を表示できるフリーソフトをインストールしておき、オシロスコープがわりに使用する。吹奏楽部の楽器を借りてきて、生徒に吹いてもらい、楽器の変化でどのように波形が変わるのか、同じ音程なら波形のどこが共通かを探す。その後、クラスを6~7人程度の6つの班に分けて、ドレミパイプの基本音セットを各班に配る。ドレミファソラシドの各パイプの長さを出し、チューナーを使って、音程が確かに表記されているとおりであることを確認する。次に各パイプの長さを計測し、関数電卓で長さの比を計算する。8本のパイプの長さだけでは規則性は分かりにくい。しかしピアノの鍵盤を見ると、白い鍵盤と黒い鍵盤があって、1オクターブの間には12のキーがあることから、残りの5本のパイプをここで配布する。ドから1オクターブ高いドまでの13本のパイプを並べてみるときれいな曲線になっていることを観察する。この曲線の式はどのようなものかということが研究課題である。関数電卓を使って、長さの間に一定の比を見いだせることに気づいてもらう。そしてその数を12乗すると $\frac{1}{2}$ になるわけで、累乗根の数学的な記号、数学的性質の確認用ワークシートを用意したい。指数関数について、生徒は初めて聞く内容であるが、ここではパイプの長さが一つ関数で表現できることに絞り込んで学習する。ワークシートで数値をプロットすることで指数関数のグラフをかく。

二回目の計画は以下である([1])。ソーゴーパイプを各班に1セットずつ配布する。10本が1セットなので全員少なくとも1本を加工することができる。1日

目の数学的活動の中で得られた指数関数を利用して、長さを計算し、そのとおりに作れば楽器が完成する。後半は楽器を作成する。加工が容易なポリエチレンパイプを材料として、基準になるCの長さをチューナーで測りながら決める。音が低ければ管の長さを少し短くカッターで切って高い音が出るようにする。最初は試行錯誤しながらの作業になるので時間がかかると思われる。Cの長さが決まれば、一定の比で長さを短くしていけばよいので、数学的な理論値を応用しながら、順にパイプを切って楽器を作っていく。班全員で協力すれば1オクターブの音が出せる楽器を作ることができるだろう。完成後は、きれいに響きあう音の組み合わせを考える。ドミソ等よく知られている心地よい和音になるのはどんなときかを調べる。最後にはその中で学んだことを各班で代表者にプレゼンテーションしてもらいたい。指数関数に関する出張授業の成果と課題を明らかにするために、著者によるまとめと事後アンケートの分析を行う。

2. 一回目の授業方法

一回目の授業の日は、台風の影響で、気象警報が発表されていた。気象警報のために、授業が休止となった学校もあったが、予定通りの授業を行うことができた。高校までの電車が遅れたが、授業開始前に到着することができた。

簡単な作業を行うために、大きな机のある会議室で行った。生徒参加型の授業を行うために、ドレミパイプ、チューナー、関数電卓のほかに生徒たちの座席表、ワークシート等を用意してもらった。授業の題目を「音楽の捧げもの」とした。授業はパソコンの画面をスクリーンに映し出すことによって行った。予算の関係で、オシロスコープの代わりに、チューナーを用いた。

始めに、著者の自己紹介および高校側の担当者と著者との関係を述べた。高校側の担当者が著者の大学の先輩であるので、そのことを紹介すると生徒達が興味をもった。授業の中で、できるだけ問いかけを行って生徒達を指名して答えてもらった。重要と思われることを、しばらく待って、ワークシートに書き込んでもらった。

ドレミパイプ、チューナー、チューナーの使用法が書かれたプリントを配って、ドレミパイプの音の音程を測定してもらった。チューナーの感度の関係で、音程の測定値は、C、D、E、F、G、Aなどであった。ドの音から1オクターブ高いドの音までのドレミパイプの長さを測定してもらった。パイプの長さの関係を見つけてもらおうとしたものである。1オクターブ高いドのパイプの長さが、最初のドの音のパイプの長さのおおよそ半分になっていることに気づいてもらった。

1オクターブ分のドレミパイプの長さの関係を方眼紙に書いてもらった。長さをプロットしてもらったが、直線上にのらないで、関数電卓を用いて、パイプの長さの関係を調べてもらった。9月時点の高校2年生の既習の関数である一次関数、二次関数、 $y = \frac{c}{ax+b}$ 、三角関数かその他の関数であるかの問題提起を行った。各班ごとにどのような関数になるかを検討してもらって、意見を述べてもらった。一次関数という回答が多く、その他の関数であるという意見も出た。パイプの長さの比に注目してもらった。長さの比がほぼ一定であることに気づいてもらった。ドレミパイプの長さは、 $\frac{1}{2}$ を底とする指数関数でおおよそかけることを説明した。その後、指数関数とは、 $a > 0, a \neq 1$ に対して、 $y = a^x$ と表される関数であることを説明した。 $a > 1$ のときと $0 < a < 1$ のときでは、グラフの形が変わること、指数法則を説明した。具体例として、 $y = 2^x, y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフを書いてもらいたかったが、時間の関係で $y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフのみを書いてもらった。

1オクターブには、12音あるので、12乗すると $\frac{1}{2}$ となる正の実数に注目してもらった。12乗すると $\frac{1}{2}$ となる正の実数を $\frac{1}{2}$ の12乗根といい、 $^{12}\sqrt{\frac{1}{2}}$ または $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ とかくことを説明した。有理数とは、ある整数 p と0でないある整数 q によって、 $\frac{p}{q}$ と表せる数であること、有理数でない実数を無理数ということ説明した。 $\sqrt{2}$ が無理数であることを思い出してもらった。 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ が無理数であることを証明した。

証明. $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ が有理数と仮定する。このとき $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ の6乗も有理数なので、 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ も有理数である。よって、 $\sqrt{2}$ が有理数となり、矛盾する。□

3. 二回目の授業方法

12乗すると $\frac{1}{2}$ となる正の実数の復習から始めた。

$(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ の近似値がどれくらいになるをワークシートを用意して、0.944、0.943、0.942の3つの値の1乗から12乗までを関数電卓で計算してもらった。関数電卓の使用法がわからない生徒がいて、計算に時間がかかった。 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ の近似値は、0.943874312...となり、 $0.944^{12} \div 0.5008$ となるので、上記の3つの値なかでは、0.944が一番近い値となる。このようにして、 $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{12}}$ の近似値を体感してもらった。

このあと、楽譜を配って、螺旋カノンを聞いてもらった。螺旋カノンの繰り返しの部分に注目してもらった。

それから、ソーゴーパープを一人に1セットずつ配った。計画では、各班に10本で1セットのものを一つを配る予定だったが、8本で1セットのものを全員に配ることができた。ソーゴーパープは、8本が1セットで、切ってパイプの長さを調整するポリエチレ

ンチューブとポリエチレンチューブを挿入するための細めのプラスチック棒がついていた。

ポリエチレンチューブを切って、挿入して、パイプの長さを調節して、音程の調整をしてもらった。音程の調整には、一回目の授業のときの用いたチューナーを使用した。ドレミファソラシドと音程の調整を全員ができるまでに、ある程度の時間がかかった。全員の音程の調整のあと、各班ごとに演奏をしてもらうために、ソーゴーパープによる演奏の練習をもらった。演奏の練習のあと、各班ごとに演奏を発表してもらった。6班による演奏をもらったが、なかなかの演奏は一つだけだった。ソーゴーパープによる演奏は、難しいようだった。

以上で授業内容が終了した。終了時刻の30分前であった。その後、SPPのアンケートと著者個人のアンケートをとった。SPPのアンケートは、前回と比べて記入内容が減ったために、15分程度で終了した。

4. 高校生向けに試行錯誤した点・ 配慮した点、生徒のアンケート 等について

高校生向けに配慮した点は、実習や作業や実験を取り入れた点や高校の教科書には書かれていないが、生徒達が興味をもつであろう内容を授業した点である。また授業の実施時期に、生徒たちが未習の指数関数について授業した点である。

高校側の担当者に大学に2回おいでいただいて、授業の打ち合わせを行った。簡単な楽器の製作を行うために、何を作るか何を用いるかということから検討した。製作のしやすさなどから、ソーゴーパープを用いることとなった。ソーゴーパープは、音が出にくかったので、この点は課題が残ることとなった。

SPPのアンケートと著者個人のアンケートの二つを行った。前回までは、SPPのアンケートに自由記述欄があったが、今回からマークシート回答のみとなった。著者個人の自由意見の回答結果が以下である。肯定的な回答が多かったが、そうでない回答もあった。

この授業のよかった点

- ・たのしい。
- ・図が分かりやすかった。
- ・わかりやすく、楽しかったこと。
- ・色々な取り組みがあったので、良かった。
- ・数学のおもしろさがわかった点。
- ・わかりやすかった。図やワークシートをつかっていてよくわかった。
- ・ふえをくれた点。
- ・笛をくれたところ。
- ・先生が丁寧に教えてくれた。
- ・わかりやすく説明してくれた点。

- ・物を作ってそれを使うのは楽しかった。
- ・音楽な所。
- ・ソーゴーパープを作るのが面白かった。
- ・数学の生活での利用に触れた。
- ・あまり知らないことを知れたこと。最後がおもしろかった。
- ・聞いていてあきない授業だった。
- ・たのしかったこと。
- ・道具をつくったところ。
- ・自分たちでいろいろ作業できた点。
- ・みんなで協力しあえた。
- ・普段なら学べないことを実験を交えてやって下さったので良かったです。
- ・音楽が好きなので内容がよかった。
- ・グループで協力ができたと思う。
- ・普段高校で学習しないことをした。
- ・ソーゴーパープ作りが楽しかった。
- ・音楽と数学をあわせた点。
- ・楽しかった。
- ・音楽をとりいれた部分。
- ・実際にパイプの楽器をつくり楽しめた。
- ・数学が活用できることがわかった。
- ・ソーゴーパープを作るのが楽しかった。
- ・いつもと違う授業でよかった。
- ・ソーゴーパープを作れた。
- ・楽器を作るのが楽しかった。
- ・楽しく作業をしながら学べました。

この授業の改善すべき点

- ・なし。
- ・まだ習ったことのない内容があったので、分からなかった。
- ・パイプじゃなくても、もっと別のものでもいいと思う。
- ・特になし。
- ・もうちょっとゆっくりしてほしい。
- ・前の文字が見えなかった。
- ・パイプじゃなくて、弦とかの方がいいと思う。
- ・もう少し興味のもてる内容にしてほしかった。
- ・音楽を取り入れたところ。少しわかりづらかった。
- ・ペースが早かったので、もう少し遅めで。
- ・少し説明がむずかしく思った。
- ・少し難しかった。
- ・発表が早すぎる。
- ・数学と音楽の関連性が分からなかった。

5. おわりに

以上のアンケート結果から、指数関数に関する出張授業の成果としては、高校生たちに授業を楽しんでもらった点、音楽と数学の関係や生活と数学の関係

を授業できた点、高校生が通常の授業では学習できないことを学習できた点がある。一方、課題としては、ソーゴパイプは製作しやすかったが、演奏が難しかった点がある。今後、指数関数の授業を行うにあたり、グループ活動・グループ作業を行うときの教材の検討が必要であると考えている。

6. 謝辞

出張授業を行う機会をくださった和歌山県立耐久高等学校の上田芳裕先生に感謝します。

参考文献

- [1] 上田芳裕、SPP 申請書 (2011).
- [2] 川上智博、高校生に対する最速降下曲線についての出張授業について、和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要 **20** (2010), 45–48.
- [3] 川上智博、高校生に対する正多面体についての出張授業について、和歌山大学教育学部教育実践総合センター紀要 **19** (2009), 81–83.
- [4] 平成 23 年度和歌山県立耐久高等学校全日制マンスリータイムズ 9 月号、<http://www.taikyu-h.wakayama-c.ed.jp/mt/pdf/mt09-2011.pdf>