高校生への数学講義の一例
—完全数とメルセンヌ素数—

A lecture for high school students on perfect numbers and Mersenne primes

片山 聡一郎　田川 裕之
Soichiro KATAYAMA　Hiroyuki TAGAWA
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

自然数 n に対して, n 以外の全ての約数の和が n となるとき, n は完全数と呼ばれている．例えば, 6, 28, 496, 8128 は紀元前から知られている完全数である．完全数を定義通りに調べていくことは多大な時間と労力を伴うこともあり, それ以外の方法で完全数の性質を研究することが盛んに行われ, 18 世紀にオイラーは偶数の完全数を探すことと, 2^m-1 の形のメルセンヌ素数と呼ばれる素数を探すことが同値であることを証明した．この結果と 20 世紀に入ってからのコンピュータの処理能力の劇的な発展に伴い, 現在までに完全数は全部で 47 個発見されている．現在知られている最大の完全数は 2600 万桁の数と言われている．尚, 完全数が無限にあるかどうか, さらに奇数の完全数があるかどうか等の基本的な問題は現在でも未解決である．

数学の世界では, 中学生や高校生でも容易に理解できる整数に関連した美しい性質がたくさんあるが, その全てを厳密に示そうとするとかなりの準備と知識を必要とすることが多い．しかしながら, 完全数とメルセンヌ素数の関係は約数と素数の知識さえあれば, 比較的容易に理解できるものだと考えられる．本稿では「完全数とメルセンヌ素数の関係」を高校生に興味をもってもらえるような道筋で完全に理解できるように解説することを目標とする．

キーワード: 約数, 素数, 完全数, メルセンヌ素数, 友愛数

1.　はじめに

数学の色々な分野における種々の考察対象に対して多数の興味深い理論や性質が発見・研究されているが, 残念ながらその多くは問題や結果の意味を理解しようとするだけでも, ある程度以上の数学的な予備知識が要求される．例外的に整数の問題は, 約数や素数などといったごく簡単な事柄を理解しているだけで, 問題や結果の意味は容易に理解することができることが多い (実際には取り扱う手法も初等的であるとは限らない)．この意味で, 時間の限られた単発の講義で扱うには格好の題材といえる．また, 数学の中でも極めて古くから研究されている対象であるにも関わらず, 現在でも多数の未解決問題が残されているという意味でも聴衆の興味を引きやすい題材である．また, 小川洋子氏の (映画化もされた) 小説 “博士の愛した数式”[1] において, 本稿で扱う完全数などの整数の問題が取り上げられていたことから, 知名度が高いという利点もある．本稿では, 中学校や高校における出前講義を想定して, 偶数の完全数の特徴付けを可能な限り予備知識を必要とせずに解説することを目標とする．

2.　完全数

まずは, 完全数の定義を厳密に行うために記号を一つ定義することから始める．以下, 自然数 n に対して

$$s(n) = \ n \text{ の全ての約数の和}$$

とおく[1]．ただし, a が自然数 n の約数であるとは, a は自然数であって, $n=ab$ となる自然数 b が存在することをいう．例えば, 一桁の数の $s(n)$ を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
&s(1)=1,\\
&s(2)=1+2=3(=2^2-1),\\
&s(3)=1+3=4,\\
&s(4)=1+2+4=7(=2^3-1),\\
&s(5)=1+5=6,\\
&s(6)=1+2+3+6=12(=2\cdot 6),
\end{aligned}$$

[1] n の全ての約数の和を表す記号としては, $\sigma(n)$ を用いることが一般的であるが, 高校生にとって記号 σ は使い慣れない文字だと思われるため, 本稿では代わりに s という記号を採用した．

$$s(7) = 1 + 7 = 8,$$
$$s(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15(= 2^4 - 1),$$
$$s(9) = 1 + 3 + 9 = 13.$$

さらに, 少し大きな数についての s を計算すると

$$\begin{aligned} s(28) &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 \\ &= 56(= 2 \cdot 28), \\ s(64) &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \\ &= 127(= 2^7 - 1), \\ s(72) &= 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 9 + 12 \\ &\quad + 18 + 24 + 36 + 72 = 195. \end{aligned}$$

また, もう少し大きな数では

$$s(496) = 992(= 2 \cdot 496),$$
$$s(8128) = 16256(= 2 \cdot 8128).$$

ここで, $s(6)$, $s(28)$, $s(496)$, $s(8128)$ に注目すると, いずれも関係式 $s(n) = 2n$ を満たしている.

定義 1 (完全数)**.** n を自然数とする. $s(n) = 2n$ のとき n を完全数という.

上で見たように, 例えば 6, 28, 496, 8128 は完全数である (これらが完全数を小さいほうから並べたときの最初の 4 つであることも知られている). なお, n を自然数とするとき, n 以外の n の約数の和は $s(n) - n$ であるから, n が完全数であるとは, n 以外の n の全ての約数の和が n になることだといってもよい.

では, 8128 より大きな完全数を探したいときにはいったいどうすればいいのであろうか. 定義通りに考えると 8129 の約数を全て求め, その和が $16258(= 2 \times 8129)$ になるかどうかを調べ, うまくいかなければ, 8130 の約数を全て求め, ... といったことを延々と繰り返すことになる. しかしながら, この方法では, たとえコンピュータを利用したとしても, 相当の労力と時間が必要となることは容易に想像できるであろう. ちなみに, 8128 に続く完全数は

$$33550336,\ 8589869056,\ 137438691328$$

である. 数学の世界に限らず, このように困難が生じると考えられるときには視点を変えて考えてみることが重要である. そこで, 完全数の性質を調べるために, 最初の 4 つの完全数を素因数分解してみると

$$6 = 2 \cdot 3 = 2(2^2 - 1),$$
$$28 = 2^2 \cdot 7 = 2^2(2^3 - 1),$$
$$496 = 2^4 \cdot 31 = 2^4(2^5 - 1),$$
$$8128 = 2^6 \cdot 127 = 2^6(2^7 - 1)$$

となり, $3, 7, 31, 127$ は $2^m - 1$ の形の素数でもある. さらに, 先の完全数についても

$$33550336 = 2^{12} \cdot 8191 = 2^{12}(2^{13} - 1),$$
$$8589869056 = 2^{16} \cdot 131071 = 2^{16}(2^{17} - 1),$$
$$137438691328 = 2^{18} \cdot 524287 = 2^{18}(2^{19} - 1)$$

となり, 同様の性質が確かめられる. 一般に次が成立する.

定理 1. 自然数 n に対して, 次の (i), (ii) は同値である (すなわち (i) が成立するならば (ii) が成立し, 逆に (ii) が成立するならば (i) が成立する).

(i) n は偶数の完全数である.

(ii) 次を満たす自然数 m が存在する.

$$n = 2^m(2^{m+1} - 1), \quad 2^{m+1} - 1 \text{ は素数}.$$

特に, $2^r - 1$ の形の素数はメルセンヌ素数と呼ばれている.

この定理 1 から, 偶数の完全数を探すこととメルセンヌ素数を探すことは同じであることが分かる. また, 定理を利用すると, 8129 から 8130, 8131 と順に 33550336 までの全ての約数の和を計算する代わりに, $2^8 - 1$, $2^9 - 1$, $2^{10} - 1$, $2^{11} - 1$, $2^{12} - 1$, $2^{13} - 1$ が素数であるかどうかを順に判定すれば 8128 よりも大きな完全数がみつかるということが分かる.

以下では, 定理 1 の厳密な証明を与えることを目的とする.

3. $s(n)$ の性質

この節では, 定理 1 を示すために必要な, $s(n)$ の性質について述べることを目的とする. まず $s(n)$ の定義から, 次が容易に分かる.

補題 1. 自然数 m, 素数 p に対して

$$s(p) = p + 1, \tag{1}$$
$$s(2^m) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m \tag{2}$$
$$= 2^{m+1} - 1, \tag{3}$$
$$s(p^m) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^m \tag{4}$$
$$= \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1}. \tag{5}$$

証明. p は素数であることから, p の約数は 1 と p のみであるので, (1) が成り立つ. 次に, 2^m の約数は 2^k

$(0 \le k \le m$, k は整数) の形であることから (補題 2 参照)

$$s(2^m) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^m \tag{6}$$

となり (2) が成り立ち, (6) の両辺を 2 倍すると

$$2s(2^m) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^m + 2^{m+1}. \tag{7}$$

従って, (7) の両辺 から (6) の両辺を引くことにより (3) が得られる. (4), (5) についても (2), (3) と同様に考えることにより得られる. □

n の素因数分解が分かっていれば, n の約数は次のように特徴づけられる.

補題 2. $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_r^{i_r}$ が n の素因数分解のとき, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) k は n の約数である.

(ii) $k = p_1^{j_1}p_2^{j_2}\dots p_r^{j_r}$, $j_1 \le i_1$, $j_2 \le i_2$, $\dots$, $j_r \le i_r$ となる 0 以上の整数 $j_1, j_2, \dots, j_r$ が存在する.

例えば, $72 = 2^3 3^2$ であるから, 72 の約数は

$$2^0 3^0,\ 2^0 3^1,\ 2^0 3^2,\ 2^1 3^0,\ 2^1 3^1,\ 2^1 3^2,$$
$$2^2 3^0,\ 2^2 3^1,\ 2^2 3^2,\ 2^3 3^0,\ 2^3 3^1,\ 2^3 3^2$$

である. $s(72)$ を求めるためには, 上記の積を全て計算してから足してももちろん構わないのだが, あえて素因数分解の形のままでの和をとり, 補題 1 を用いると

$$\begin{aligned} s(2^3 3^2) &= s(72) \\ &= 2^0(3^0 + 3^1 + 3^2) + 2^1(3^0 + 3^1 + 3^2) \\ &\quad + 2^2(3^0 + 3^1 + 3^2) + 2^3(3^0 + 3^1 + 3^2) \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2) \\ &= s(2^3)s(3^2) \end{aligned}$$

となる. 一般に次が成立する.

補題 3. n を自然数とする. $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_r^{i_r}$ が n の素因数分解のとき

$$s(n) = s(p_1^{i_1})s(p_2^{i_2})\dots s(p_r^{i_r})$$

である[2].

補題 3 から次が容易に得られる.

系 1. a, b を自然数とする. $\gcd(a, b) = 1$ のとき

$$s(ab) = s(a)s(b).$$

ただし, $\gcd(a, b)$ は a と b の最大公約数を表すものとする[3].

証明. $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_s^{i_s}$ を a の素因数分解, $q_1^{j_1}q_2^{j_2}\dots q_t^{j_t}$ を b の素因数分解とすると, $\gcd(a, b) = 1$ により

$$p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_s^{i_s}q_1^{j_1}q_2^{j_2}\dots q_t^{j_t}$$

は ab の素因数分解である. 従って, 補題 3 から

$$\begin{aligned} s(ab) &= s(p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_s^{i_s}q_1^{j_1}q_2^{j_2}\dots q_t^{j_t}) \\ &= s(p_1^{i_1})s(p_2^{i_2})\dots s(p_s^{i_s})s(q_1^{j_1})s(q_2^{j_2})\dots s(q_t^{j_t}) \\ &= s(p_1^{i_1}p_2^{i_2}\dots p_s^{i_s})s(q_1^{j_1}q_2^{j_2}\dots q_t^{j_t}) \\ &= s(a)s(b) \end{aligned}$$

となり求める等式が得られる. □

4.　定理 1 の証明

本節では, これまでに得られた $s(n)$ の性質を用いて定理 1 を証明する.

まず, (i) ならば (ii) であることを示そう. n を偶数の完全数とする. n は偶数であるので

$$n = 2^m a \tag{8}$$

となる自然数 m と奇数 a が存在する. $\gcd(2^m, a) = 1$ であるので, 系 1 と補題 1 から

$$\begin{aligned} s(n) &= s(2^m a) \\ &= s(2^m)s(a) \\ &= (2^{m+1} - 1)s(a). \end{aligned} \tag{9}$$

他方, 仮定より, n は完全数であるので

$$s(n) = 2n = 2(2^m a) = 2^{m+1}a. \tag{10}$$

従って, (9), (10) から

$$2^{m+1}a = (2^{m+1} - 1)s(a) \tag{11}$$

であり, (11) から[4].

$$\begin{aligned} s(a) &= \frac{2^{m+1}a}{2^{m+1} - 1} \\ &= \frac{(2^{m+1} - 1)a + a}{2^{m+1} - 1} \\ &= a + \frac{a}{2^{m+1} - 1} \end{aligned} \tag{12}$$

---

[2] さらに補題 1 から $s(n) = \prod_{k=1}^{r} \frac{1 - p_k^{i_k+1}}{1 - p_k}$ と記述できることも分かるが, 本稿の目的のためには, この表示は不要である.

[3] 従って, $\gcd(a, b) = 1$ とは, 言い換えると a と b が互いに素であることを意味する.

[4] $m \ge 1$ から $2^{m+1} - 1 \ne 0$ であることに注意.

と表せる. ここで

$$d = \frac{a}{2^{m+1}-1} \tag{13}$$

とおくと, $a, m > 0$ から

$$d > 0 \tag{14}$$

であり, さらに, (12), (13) から

$$d = s(a) - a$$

となり, $s(a), a$ は自然数であることと (14) から

$$d \text{ は自然数.} \tag{15}$$

また, $m \geq 1$ から $2^{m+1}-1$ は 3 以上の自然数であるので, (13), (15) から

$$1 \leq d < a, \tag{16}$$

$$d \text{ は } a \text{ の約数.} \tag{17}$$

a は a の約数であるから, (16) と (17) より, a と d は a の 2 つの異なる約数である. さらに (12) と (13) から, $s(a) = a + d$ であるので

$$a \text{ の異なる約数は } a,\ d \text{ の 2 個のみ.} \tag{18}$$

すなわち, a と d 以外には a の異なる約数がないことが分かる. a は必ず 1 を約数にもつから, (18) より

$$d = 1, \quad a \text{ は素数.}$$

ここで, d の定義と $d = 1$ から

$$a = 2^{m+1} - 1$$

と表すことができ, 結果的に

$$n = 2^m(2^{m+1}-1), \quad 2^{m+1}-1 \text{ は素数}$$

となることが分かった.

次に (ii) ならば (i) が成り立つことを示そう. $n = 2^m(2^{m+1}-1)$ と記述でき, $2^{m+1}-1$ は素数であるので, 補題 1 と系 1 から

$$s(n) = s(2^m)s(2^{m+1}-1) = (2^{m+1}-1)2^{m+1} = 2n.$$

従って, n は偶数の完全数である.

以上により, 定理 1 の成立が厳密に証明された.

5. 友愛数と社交数

本節では, 完全数の一つの拡張として知られる友愛数, 準友愛数, 社交数についての概説を行う. まず新しい記号を一つ導入しよう. 自然数 n に対して

$$t(n) = s(n) - n$$

とおく. この記号を用いると, 先に述べたように n が完全数であることと $t(n) = n$ となることは同値である. 友愛数は次で定義される.

定義 2 (友愛数)**.** m と n を異なる自然数とする.

$$t(m) = n,\ t(n) = m$$

のとき, (m, n) を友愛数（もしくは, 親和数）と呼ぶ.

例えば

$$\begin{aligned} t(220) =& 1+2+4+5+10+11 \\ &+20+22+44+55+110 \\ =& 284, \\ t(284) =& 1+2+4+71+142 = 220 \end{aligned}$$

となるので, $(220, 284)$ は友愛数である. 他に

$$(1184, 1210),\ (2620, 2924),\ (5020, 5564),$$
$$(6232, 6368),\ (10744, 10856),\ (12285, 14595),$$
$$(17296, 18416),\ (63020, 76084),\ (66928, 66992)$$

などは友愛数である.

友愛数は 2 つの数の組に対して定義されたが, n 個の組に対して定義される社交数と呼ばれるものもある.

定義 3 (社交数)**.** n を 3 以上の自然数とする. n 個の相異なる自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が

$$t(a_1) = a_2, t(a_2) = a_3, \ldots, t(a_{n-1}) = a_n, t(a_n) = a_1$$

を満たすとき, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ を社交数と呼ぶ.

例えば

$$(12496, 14288, 15472, 14536, 14264)$$

は社交数である. 次も社交数の一つとして知られている.

$$\begin{aligned} (&14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, \\ &295488, 629072, 589786, 294896, 358336, \\ &418904, 366556, 274924, 275444, 243760, \\ &376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, \\ &48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716) \end{aligned}$$

以下, 余談であるが, もう少しで友愛数になるという意味から準友愛数と呼ばれているものを紹介しておく. 異なる 2 つの自然数 m, n に対して

$$t(m) - 1 = n,\ t(n) - 1 = m$$

となるとき, (m,n) を準友愛数（もしくは, 婚約数）と呼ぶ. つまり m と n が準友愛数であるとは, それぞれの 1 とそれ自身以外の約数の和が一致することである. 例えば

$$\begin{aligned} t(48)-1 &= 2+3+4+6+8+12+16+24 \\ &= 75, \\ t(75)-1 &= 3+5+15+25 \\ &= 48 \end{aligned}$$

となるので, $(48,75)$ は準友愛数である. 他に

$$\begin{aligned} &(140,195),\ (1050,1925),\ (1575,1648), \\ &(2024,2295),\ (5775,6128),\ (8892,16587), \\ &(9504,20735),\ (62744,75495) \end{aligned}$$

も準友愛数であり, これまでに知られている準友愛数は全て偶数と奇数のペアとなっている.

関連して, 整数 u,v が与えられたとき

$$t(m)+u=n,\ t(n)+v=m$$

となる (m,n) が実際に存在するのか, 存在する場合には共通の性質は何か, 存在しない場合には何故存在しないのかというような問題を考えることができる. 友愛数は $u=v=0$ の場合に対応し, 準友愛数は $u=v=-1$ の場合に対応する. このような問題を, 例えばコンピュータのプログラミング演習として考察してみることはとても興味深いことであると思われる.

6.　最後に

著者の一人が, 2011 年 10 月に田辺高等学校で開催された「ライブカレッジ 2011」において, 本稿に従って講義を行ったところ（50 分の同内容の講義を 2 度実施）, タイトルに「博士の愛した数式」で話題となった「完全数」を入れた効果もあってか, いずれも教室は満杯状態であった.

若干, 予定していた以上のことを途中で解説してしまったこともあり, 最後の節での内容については十分な時間をとることができなかったが, 完全数とメルセンヌ素数の関連性についての厳密な証明については省略することなく十分に解説することができたと思っている.

尚, 講義終了後に実施された本講義のアンケートでは「難しすぎて理解できなかった」, 「何を言っているのか分からなかった」, 「内容について行けなかった」といった意見が多く見られたが, 中には「数学は奥が深くて楽しいと思った」, 「面白い内容で集中できた」, 「大変だったが楽しかった」, 「とても分かりやすかった」との意見もあった. また「板書のスピードが早すぎる」, 「話すスピードが速い」, 「板書の量が膨大でわかりにくい」といった感想もよせられた. これらのアンケート結果を真摯に受け止め, さらに本稿の精査が必要であると感じた.

7.　謝辞

実際に授業を行う機会を与えて頂いた田辺高等学校の野間宏久先生に感謝の意を表したい.

参考文献

[1] 小川洋子, “博士の愛した数式”, 新潮社, 2003.

[2] 松坂和夫, “代数系入門”, 岩波書店, 1976.