

力学における運動と力の方向

Vectors of Motion and Force in Mechanics

石塚 互・宮永 健史
Wataru ISIZUKA, Takeshi MIYANAGA

1. はじめに

「『飛んでいる矢』は静止している。なぜなら、あらゆる瞬間で、矢は止まっているからである」。これは、古代ギリシャ時代から「ゼノンのパラドックス」の1つとして知られているものである。ニュートン力学のおかげで、私たちは今ではこれに悩む必要はない。微分法を持ち出すまでもなく、現代の私たちにとっては、速度・加速度・力などといった量を直感的に理解することは、それほど難しくないだろう。そして、それらを使った「運動方程式」で表現される、ニュートンの三つの法則（慣性の法則・運動の法則・作用反作用の法則）は、私たちの世界のあらゆる力学的な運動を正しく記述する。

「運動」は、高等学校の物理で最初に扱うテーマであり、物理学の典型的なスタイルを提示する。そして生徒にとっては、これが物理学の第一印象になる。とすれば、ここで生徒の興味を引き出すことの重要性については、改めて言うまでもないだろう。加えて現在は、物理学がとりわけ大きな進歩をしている時代の中にある。その意味からも、教材や指導法の面での改善の工夫が、教師の側には常に求められている。

本稿では、現在の目から、ニュートン力学の導入部分で注意しておきたい点をいくつか指摘し、併せてニュートン力学の中でも最も重要な運動方程式に関わって、筆者らがこのほうが良いのでは？と考える、速度の表記法を提案をしたい。

2. 慣性の法則の「不自然さ」

現代の私たちは、スペースシャトルから届けられる映像などを通して、「無重力状態」がどんなものであるのかを理解している。ニュートン以前の時代と違って、宇宙という天上界も（神ではなく）人間の世界であり、地上と同じ物理法則に従っていることを、生徒も既に知識としては知っている。そこではニュートンの「慣性の法則」が、正しく成立する。しかし重力が働き、また物と物が接触していることから生ずる摩擦が避けられない異常な世界、つまり地上では、アリストテレスが言ったように、動いている物は、いずれは必ず静止する。宇宙空間というものを想像することが難しかった時代には、慣性の法則を理解することも、それと同じくらいに難しかったに違いない。

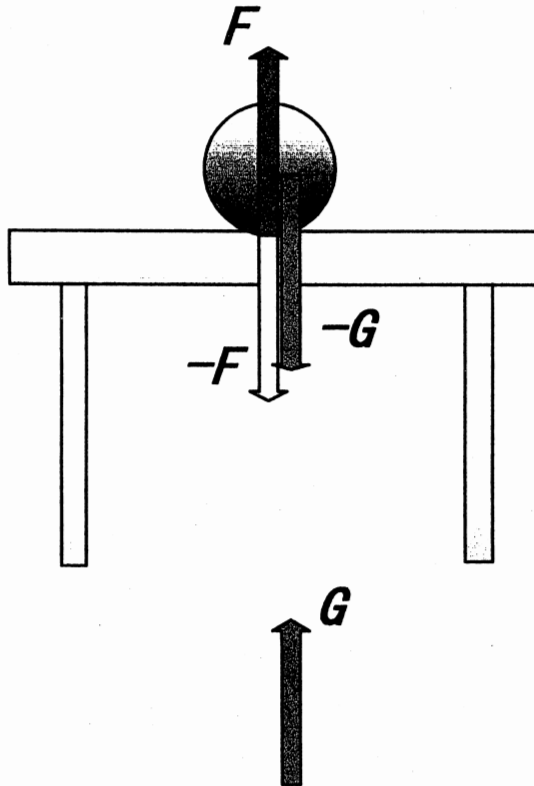
そうであるならば、物理を最初に教えるときの舞台装置は、地上から離れて宇宙、つまり「天上」に採る方が良いのではないだろうか。地上に留まっているかぎりには、慣性の法則を実感することは簡単ではない。このことに留意することは、生徒の側に当然に生じうる物理に対する「違和感」を除くとともに、力学に歴史的な意味を加えて（ニュートン力学の「発見」まで長い試行

錯誤の時間が必要だったということ)、生き活きとした物理の姿を伝えるために役に立つと考える。

「作用反作用の法則」も、地上にある「雑音」を除いて見れば、イメージがより明確になる。容易に想像できるように、足場のない宇宙空間で物を前に投げると、私たちはその反動で後ろに跳ばされてしまうだろう。このときに、物に加えた力と私たちに帰ってくる力は、向きが反対で大きさが等しい。つまり、「ベクトル」としての力の合計（合力）は0になる。もしそうでないとすると、私たちと物を一つのセットとして見たときに、これに作用する、差し引き0でない正味の力が残ってしまう。この力は、誰かがどこかの足場に立って、私たちに加えられたものなのだろうか？ニュートンの「神」は、そんなことはしない。宇宙船が進むためには、積んでいる燃料を燃焼してできるガスのジェットを、後方に向けて噴射しなければならない。宇宙船と燃料とガスが、全部まるごと一緒に移動することはできない。

もちろん地上でも、これらの法則は厳密に守られているはずである。摩擦が小さな氷の上では、動いている物はそのままの速度で運動を続けるし、また何もしていないのにひとりで動きはじめる、ということもない。慣性の法則が言う通りである。作用反作用の法則の方はどうか。机の上に置かれたリンゴに働く力は、地球がリンゴを引き付ける万有引力 $-G$ と、接している机の上面から受ける上向きの力（垂直抗力） F の2つがある。 $-G$ の反作用が、リンゴが地球を引っ張る万有引力 G であり、 F の反作用が、リンゴが机を下に押し付ける力 $-F$ である。 G と $-F$ の和が（大きさと、方向も考えなければいけない）0であれば、リンゴは机の上で留まったままでいられる。

【図1】



それでは机の方はどうか？机に働く力は $-F$ と、地球が机を引き付ける万有引力 $-H$ 、それに

床が机を上に押し上げている力 K の3つがある。 K は、机が床を下に押す力 $-K$ の反作用に他ならない。このとき次の関係、

$$(1) \quad -F - H + K = 0$$

があれば、机は床にめり込むことはない。しかし、それでは床は？また床の下の地面は？……と考えていくと、話はそれほど簡単ではないことに気がつく。これは、接触面で作用する「近接力」と、引力のような「遠隔力」を、同時に扱っているためである。重力が作用し、他の多くの要素を考慮に入れなければならない、地上という異常な世界では、ニュートン力学の姿は見え難い。

3. 力と速度のベクトル

さて、力と運動の関係を科学的に、つまり定量的に表わす「運動の法則」は、普通は次の形の運動方程式で示される。

$$(2) \quad F = ma$$

m は物体の質量、 a はその加速度であるが、この式は、物体に作用する力と、質量と加速度の積が等しい、ということを行っている。独立した概念である力、質量、加速度の間で、いつでも守られている一つの関係である。これについては問題はない。しかし、普通はそうであるように m が一定の定数の場合には、この式は、運動方程式というよりも、むしろ静的な、一方を他方で（力を加速度で、またはその反対に加速度を力で）表わすための定義式のように受け取られやすい。

高校では微分を使った表記をしないので難しいのかもしれないが、やはりニュートン自身が「プリンキピア」で著した次の形の方が、初学者にとっても望ましいと思われる。

$$(3) \quad F = (d/dt) p$$

p は運動量を表わす。

$$(4) \quad p = m v$$

と書くことができれば、式(3)は式(2)に戻る。式(3)にはダイナミクスが入っている。力は、運動量の変化を引き起こすのである。式(4)のもとでは、

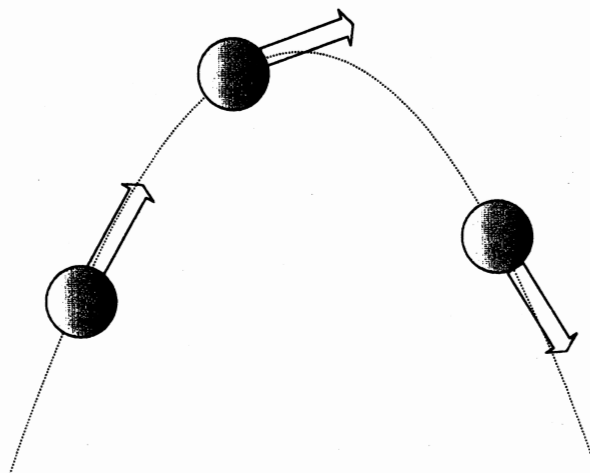
$$(5) \quad F = m (d/dt) v$$

である。力は速度を変化させる。力が物を移動させる、つまり位置（変位）を変化させるのでは決してない。

以上のことは既に知っている者にとっては当然のことで、また後の「力積」と「運動量」の単

元で扱われることになってはいる。しかし、物理を初めて学習する生徒が、ここを誤解して躓いてしまうケースは決して少なくないように思われる。たとえば、放物運動や等速円運動の場合に物体に働く力は、物体の進行方向に向いていると考えてしまいやすい（図2）。

【図2】



現代にあっても、地上に暮らす人間の素直な感性は、ギリシャ時代と変わってはいない。それは、物を動かして動かし続けるためには、力を加えなければならないという「常識」である。そこで私たちは、ニュートンの運動方程式の意味を正確に捉えるために、生徒に対して次の2点を特に強調する必要があると考える。

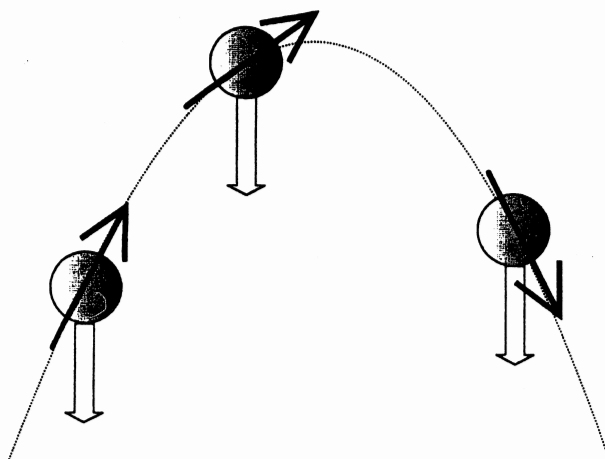
(a) 力は物体に作用して、速度ベクトル（正確には運動量ベクトル）を変化させる。変位ベクトルを直接、ではない。

(b) 速度は、ある時刻の前後の短い時間（瞬間速度では、この時間を0に近づける）の中で測定される量で、物体のその後の位置に直接関係する。

方物運動や等速円運動の例のように、物体は一般には、力の向きに運動するのではない。

私たちは、上の(a)、(b)の主張に沿った表現を採ることにしたい。それには、力は物体に始点を置くベクトルで、そして速度は常に物体を貫くベクトルで表わすのが適当であろう。放物運動の場合には、次の図3のように表わすのである。

【図3】



力はここでは下向きの重力であるが、これが物体の速度ベクトルに作用して、その向きを下向きに曲げていく状況が、より明確に表わされていると思う。

本来、力、速度、変位などは、全く別個の物理量であり（次元あるいは単位が異なる）、足したり引いたりすることはできない。実際、これらは互いに異なるベクトル空間の元（要素）なので、それらに跨る演算は意味を持たない。そうであれば、同じ「矢印（ベクトル）」で書くことは、かえって混乱を招くことのようにも思える。この意味からも、図3のように表記の仕方に違いを持たせることの利点はあるだろう。公式 $A \times B = C$ を暗記してAとBからCを計算する、というのが物理なのだとして誤解されないように、そして一見無関係に見えるA、B、Cの間に隠されている関係を解き明かすという、物理の醍醐味に触れてもらうことができるのか、私たちの力量も問われている。

4. 速度と運動量

おわりに、最近話題のペットボトル製のロケットを例にとって、速度と運動量、エネルギーの間の関係を見てみることにしたい。ロケットは、うまく調節すれば100メートル以上も遠くまで飛んでいくが、このときに適量の水をボトルの中に入れる。なぜ水を入れるのだろうか？ロケットは水のジェットを後方に噴射して、その反作用を受けて推進力を得ている。水を入れなければ、ロケットが噴射するものは空気のジェットである。力学を知っている人には、説明はこれだけで充分かもしれない。

念を押すならば、エネルギーと運動量は保存する量であり、速度はそうではない。エネルギーは、自転車のタイヤに空気を入れるポンプを押すなどして、蓄えられる。このエネルギー（E）が、発射の時にロケット本体とジェットとに配分される。ロケットとジェットの持つ運動量（p）は、逆向きで同じ大きさでなければならない（発射前での運動量の合計は0）。エネルギーの受け渡しが速やかに行われるものとすれば、これは発射の瞬間に「ロケットと燃料」が「ロケット本体」と「ジェット」の二つに分かれるという、いわゆる二体問題になり、簡単に解くことができる。

すなわち、水を入れたときと入れないときとは、本体に対するジェットの質量の相対比が大きく違う。そこで、

$$(4) \quad p = m v$$

において、左辺の運動量の大きさは、エネルギーの保存則

$$(6) \quad E = p \cdot p / 2 m$$

から押えられるので、相対質量の小さなものの方が、より大きな速度を得る。これは水に対するペットボトルの場合である。具体的な数値を入れて、エネルギー・運動量の法則からロケットの初速度とその軌道を計算するというのは、生徒にとって、力と速度・運動量間の力学的な関係を理解するのに適当な練習問題になると思う。